درسنامه

جبرهای باناخ

مؤلف: دکتر جمال روئین

پاییز ۱۳۸۸

پیش‌گفتار

جبرهای باناخ شاخه‌ای از آنالیز تابعی می‌باشد که بطور وسیعی دو شاخهٔ جبر و آنالیز را به هم پیوند داده و بنابه گفتهٔ ریکارت [۱]، جبر باناخ رشته‌ای از ریاضیات است که پا در جبر و سر در آنالیز دارد. بنیان‌گذار نظریهٔ جبرهای باناخ گلفاند [۲] می‌باشد که اولین بار با ارائهٔ برهان جدیدی برای قضیهٔ ونیر [۳] باعث گردید که ریاضیدانان بسیاری توجه خود را به این نظریهٔ جدید جلب کنند.
درس‌نامهٔ حاضر حاصل تدریس این درس توسط مؤلف، در طول چند سال اخیر در دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایهٔ زنجان می‌باشد که در ابتدا به صورت دست نویس تهیه گردیده و سپس توسط دانشجویان تایپ گردیده است.
این درس‌نامه شامل پنج فصل به شرح زیر می‌باشد:
فصل اول اختصاص به مفاهیم عمومی جبرهای باناخ از قبیل همومورفیسم‌های مختلط، طیف، واحد تقریبی و گروه عناصر معکوس‌پذیر دارد.
فصل دوم جبرهای باناخ جابجایی و فضای ایده‌آل ماکسیمال را مورد مطالعه قرار می‌دهد.
فصل سوم حاوی مطالب تکمیلی در مورد جبرهای باناخ از قبیل مرز شیلوف، طیف توام و معادل سازی ایده‌آل‌های ماکسیمال در جبرهای باناخ جابجایی و یکدار می‌باشد.
فصل چهارم اختصاص به جبرهای اینولوشن‌دار و بویژه B^*- جبرها دارد و در آن قضیهٔ مشهور نمایش گلفاند—نیمارک مورد بررسی و مطالعه قرار می‌گیرد.
بالاخره فصل پنجم در مورد نظریهٔ طیفی جبرهای باناخ می‌باشد که با استفاده از تعریف انتگرال توابع برداری—مقدار، حسابان طیفی و قضیهٔ نگاشت طیفی را مورد مطالعه قرار می‌دهد.

در پایان از آقایان ابوالفضل کلانتری، ایوب اسدبیگی و از خانم اعظم بیاتی که تایپ این درس‌نامه را تقبل نموده، و همچنین از خانم اکرم علیخانی که ویراستاری این درس‌نامه را به عهده گرفته‌اند، کمال تشکر و امتنان را دارم.

جمال روئین
پاییز ۱۳۸۸

---

[۱] C.E.Rickart
[۲] I.M.Gelfand
[۳] N.Wiener

فهرست

۱ مفاهیم عمومی جبرهای باناخ

۱.۱ مقدمات ۱

۲.۱ هومومورفیسم های مختلط ۵

۳.۱ طیف ۷

۴.۱ ضرب آرنس ۱۶

۵.۱ مفاهیمی درباره‌ی جبرهای بدون واحد ۱۹

۶.۱ عناصر شبه معکوس پذیر ۲۵

۷.۱ گروه اعضای معکوس‌پذیر در یک جبر باناخ واحددار ۲۹

۸.۱ جبر خارج قسمتی ۳۲

۲ جبرهای باناخ جابجایی

۱.۲ مقدمات ۳۶

۲.۲ صورت عمومی تابکهای خطی– ضربی در بعضی از جبرهای باناخ ۴۱

۳.۲ فضای ایده‌آل (مدولار) ماکسیمال ۴۶

۴.۲ شعاع طیفی و رادیکال ۵۵

۵.۲ مقسوم‌علیه‌های توپولوژیکی صفر ۵۹

۳ مطالب تکمیلی در مورد جبرهای باناخ

۱.۳ مرز شیلوف ۶۶

۲.۳ مطالب بیشتری در مورد طیف و طیف توأم ۷۴

۳.۳ معادل سازی ایده‌آلهای ماکسیمال در جبرهای باناخ جابجایی و یکدار ۸۳

۴ جبرهای اینولوشن‌دار

۱.۴ مقدمات ۹۲

۲.۴ B^*–جبرها و قضیهٔ گلفاند–نیمارک ۹۶

۳.۴ نظریهٔ نمایش جبرهای اینولوشن‌دار ۱۰۷

۴.۴ قضیه نمایش برای B^*–جبرها ۱۱۹

۵.۴ نتایجی از قضیه‌ی نمایش ۱۲۷

۵ نظریهٔ طیفی جبرهای باناخ

۱.۵ انتگرال گیری توابع برداری – مقدار ۱۳۷

۲.۵ توابع هولومورفیک برداری– مقدار ۱۴۱

۳.۵ حسابان طیفی ۱۴۵

۴.۵ انتگرال گیری از توابع $A-$ مقداری ۱۴۶

فصل اول

مفاهیم عمومی جبرهای باناخ

۱.۱ مقدمات

تعریف ۱.۱.۱ یک جبر مختلط فضایی برداری مانندA بر میدان اعداد مختلط $\mathbb{C}$ است به طوری که در آن یک عمل ضرب با خواّص زیر تعریف شده باشد:

$$x(yz) = (xy)z \tag{۱}$$

$$(x+y)z = xz + yz, \;\; x(y+z) = xy + xz \tag{۲}$$

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \tag{۳}$$

برای هرx ، y وz درA و هر اسکالرα.

زیرفضای I از جبر A را یک ایده‌آل چپ (راست) A گوییم هرگاه به ازاء هر $x \in A$ و هر $y \in I$ داشته باشیم $xy \in A$ ($yx \in A$). اگر I هم ایده‌آل چپ و هم ایده‌آل راست A باشد، I را یک ایده‌آل دوطرفهٔ A گویند.

ایده‌آل (چپ، راست، دوطرفه) I را واقعی (سره) گویند هرگاه $I \neq A$.

ایده‌آل‌های (چپ، راست، دوطرفه) ماکسیمال ایده‌آل‌های سره‌ای هستند که در هیچ ایده‌آل سرهٔ بزرگتر از نوع خودشان قرار نگیرند.

اگر به علاوه، جبر مختلط A یک فضای باناخ بوده که نرم آن در نامساوی ضربی زیر صدق کند

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad (x, y \in A) \tag{۴}$$

و همچنین A دارای عضو واحد e باشد به طوری که

$$xe = ex = x \qquad (x \in A) \tag{۵}$$

و

$$\|e\| = 1 \tag{۶}$$

آنگاه A را یک جبر باناخ می گویند.

لازم به ذکر است که A لزوماً جابجایی، یعنی $xy = yx$ برای هر $x, y \in A$، نیست. واضح است که حداکثر یک $e \in A$ موجود است که در (۵) صدق می‌کند، زیرا اگر e' نیز در (۵) صدق کند آنگاه $e' = e'e = e$.
وجود عضو واحد اغلب از تعریف جبر باناخ حذف می‌شود، امّا به هر حال با وجود عضو واحد می‌توان از معکوس پذیری صحبت به میان آورده و در نتیجه طیف یک عضو A می‌تواند به صورت طبیعی تر از سایر روشها تعریف گردد. به علاوه وجود عضو واحد چندان خللی به کلّیت نظریه‌ی جبرهای باناخ وارد نمی‌کند زیرا اغلب جبرهای باناخ مهّم واحددارند و برای آنهایی که واحددار نیستند می توان یک واحد به طریق زیر اضافه نمود:
فرض کنیم A در شرایط (۱) تا (۴) صدق کرده و A دارای عضو واحد نباشد. گیریم A_1 متشکل از کلیّه‌ی ازواج مرتب (x, α) باشد که در آن $x \in A$ و $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$A_1 = \{(x, \alpha) : x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

اعمال فضای برداری را به طور نقطه وار روی A_1 تعریف کرده وضرب را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$(x, \alpha)(y, \beta) = (xy + \alpha y + \beta x, \alpha\beta) \tag{۷}$$

و همچنین قرار می‌دهیم

$$\|(x, \alpha)\| = \|x\| + |\alpha| \qquad e = (0, 1) \tag{۸}$$

اکنون به راحتی دیده می‌شود که A_1 در شرایط (۱) تا (۶) صدق کرده و $x \longrightarrow (x, 0)$ یک ایزومورفیسم ایزومتری از A به روی زیر فضایی از A_1 (در حقیقت، به روی یک آیده‌ال دو طرفه از A_1) با هم بعد، یک است. اگر x را با $(x, 0)$ یکی بگیریم آنگاه A_1 بطور خلاصه جمع مستقیم A و زیر فضای یک بعدی تولید شده به

وسیله‌ی e است.

نامساوی (۴) ضرب را یک عمل پیوسته بر A می‌گرداند. این بدین معنی است که اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$ ، آنگاه $x_ny_n \to xy$ که این مطلب از اتّحاد

$$x_ny_n - xy = (x_n - x)y_n + x(y_n - y) \tag{۹}$$

به دست می‌آید بالاخص، ضرب چپ– پیوسته و راست– پیوسته می باشد:

$$x_ny \longrightarrow xy \quad , \quad xy_n \longrightarrow xy \tag{۱۰}$$

اگر $x_n \to x$ و $y_n \to y$.

جالب است که (۴) را می‌توان با شرطی (ظاهراً) ضعیف‌تر از (۱۰) تعویض نموده و (٦) را از تعریف حذف نمود بدون آنکه خانواده‌ی جبرهای مورد نظر را گسترش داد:

قضیه ۲.۱.۱ گیریم A یک فضای باناخ و همچنین یک جبر مختلط با واحد $e \neq 0$ بوده که در آن ضرب چپ– پیوسته و راست– پیوسته باشد . در این صورت نرمی بر A موجود است که همان توپولوژی داده شده را تولید کرده و A را به یک جبر باناخ تبدیل می کند.

(فرض $e \neq 0$ حالت غیر جالب $A = \{0\}$ را از بین می‌برد.)

برهان. به ازای هر $x \in A$ عملگر چپ– ضرب M_x را با ضابطه‌ی زیردر نظر می‌گیریم

$$M_x(z) = xz \qquad (z \in A) \tag{۱}$$

گیریم $\tilde{A}$ مجموعه‌ی کلیّه‌ی M_x ها باشد. از آنجا که ضرب راست– پیوسته می‌باشد $\tilde{A} \subseteq B(A)$، که در آن $B(A)$ فضای باناخ کلیّه‌ی عملگرهای خطّی پیوسته بر A است. واضح است که $x \to M_x$ خطّی است. خاصیّت شرکت پذیری ایجاب می‌کند که همواره $M_{xy} = M_xM_y$. اگر $x \in A$، آنگاه

$$||x|| = ||xe|| = ||M_xe|| \leq ||M_x||||e|| \tag{۲}$$

به طور خلاصه نگاشت $x \to M_x$ یک ایزومورفیسم از A به روی جبر $\tilde{A}$ بوده که معکوس آن پیوسته می‌باشد. چون

$$||M_xM_y|| \leq ||M_x||||M_y|| \qquad , \qquad ||M_e|| = ||I|| = 1 \tag{۳}$$

$\tilde{A}$ یک جبر باناخ است اگر تام باشد که این نیز معادل با بسته بودن $\tilde{A}$ در $B(A)$ نسبت به توپولوژی حاصل از نرم عملگری است. اگر این برقرار باشد آنگاه قضیّه‌ی نگاشت باز نتیجه می‌دهد که $x \to M_x$ نیز پیوسته است بنابراین $||x||$ و $||M_x||$ نرم‌های معادلی بر A خواهند بود. فرض می‌کنیم $T \in B(A)$، $T_i \in \tilde{A}$، $T_i \to T$ نسبت به توپولوژی $B(A)$. اگر T_i ضرب از چپ در $x_i \in A$ باشد، آنگاه

$$T_i(y) = x_i y = (x_i e)y = T_i(e)y \qquad (۴)$$

حال اگر $i \to \infty$، جمله‌ی اوّل در (۴) به $T(y)$ میل کرده و $T_i(e) \to T(e)$. از آنجا که ضرب چپ- پیوسته در A است نتیجه می‌شود که سمت راست (۴) به $T(e)y$ میل می‌کند. قرار می‌دهیم $x = T(e)$. در این صورت

$$T(y) = T(e)y = xy = M_x(y) \qquad (y \in A) \qquad (۵)$$

بنابراین $T = M_x \in \tilde{A}$ و $\tilde{A}$ بسته است. □

مثال: فرض کنیم $C(K)$ فضای باناخ کلیّه‌ی توابع مختلط پیوسته بر فضای ناتهی هاسدورف و فشرده‌ی K با نرم سوپریموم باشد. ضرب را به‌طور معمول تعریف می‌کنیم

$$(fg)(p) = f(p)g(p)$$

این $C(K)$ را به یک جبر باناخ جابجایی تبدیل می‌کند که واحد آن تابع ثابت ۱ می باشد. اگر K یک مجموعه‌ی متناهی متشکّل از مثلاً n نقطه باشد ، آنگاه $C(K)$ همان $\mathbb{C}^n$ با ضرب مؤلّفه‌وار است. در حالت خاّص $n = 1$، ساده‌ترین جبر باناخ یعنی $\mathbb{C}$ با قدر مطلق بجای نرم را به دست می آوریم.

مثال: گیریم X یک فضای باناخ باشد در این صورت $B(X)$، جبر کلّیه‌ی عملگرهای خطّی و محدود بر X یک جبر باناخ نسبت به نرم عملگری است. عملگر همانی I عضو واحد است. اگر $\dim X = n < \infty$ آنگاه $B(X)$ با جبر کلیهٔ ماتریس‌های مختلط $n \times n$ ایزومورفیک می‌باشد. اگر $\dim X > 1$ آنگاه $B(X)$ جابجایی نیست (حالت بدیهی $X = 0$ باید استثناء شود.) همچنین هر زیر جبر بسته‌ی $B(X)$ که I را شامل باشد یک جبر باناخ است. اثبات قضیّه‌ی (۲.۱.۱) نشان می دهد که در حقیقت هر جبر باناخ با یکی از این جبر ها ایزومورفیک است.

مثال: اگر K یک زیر مجموعه‌ی فشرده ناتهی از $\mathbb{C}$ بوده و A زیر جبر $C(K)$ متشکّل از کلّیه‌ی $f \in C(K)$ باشد که در درون K هولومورفیک باشند آنگاه A تّام (نسبت به نرم سوپریموم) و بالنّتیجه یک جبر باناخ است.

اگر K گوی بسته‌ی واحد در $\mathbb{C}$ باشد، A را یک جبر قرصی (disc algebra) می گویند.

۲.۱ هomomorphism های مختلط

تعریف ۱.۲.۱ هر نگاشت خطّی h از یک جبر باناخ به‌توی یک جبر باناخ دیگر را که ضربی:

$$h(xy) = h(x)h(y)$$

نیز باشد یک هomomorphism گوییم. یکی از حالات مهّم آن است که برد h ساده‌ترین جبر باناخ یعنی $\mathbb{C}$ باشد.

تعریف ۲.۲.۱ گیریم A یک جبر باناخ و ϕ یک تابعک خطّی بر A باشد که متّحد صفر نباشد. اگر

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$$

برای هر $x \in A$ و $y \in A$ آنگاه ϕ را یک هomomorphism بر A می‌گویند. (البتّه استثناء کردن $\phi \equiv 0$ یک قرار داد است)

تعریف ۳.۲.۱ عنصر $x \in A$ را معکوس پذیر گوییم هرگاه دارای معکوس درA باشد، یعنی عنصری مانند $x^{-1} \in A$ باشد که

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

که در آن e عضو واحد A است.

قابل ذکر است که هیچ $x \in A$ نمی‌تواند بیش از یک معکوس داشته باشد، زیرا اگر

$$yx = e = xz$$

آنگاه

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z$$

قضیه ۴.۲.۱ اگر ϕ یک هومورفیسم مختلط بر جبر مختلط A با واحد e باشد، آنگاه $\phi(e)=1$ و $\phi(x) \neq 0$ برای هر عضو معکوس پذیر $x \in A$.

برهان. برای یک $y \in A$ داریم $\phi(y) \neq 0$. چون

$$\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$$

نتیجه می‌شود که $\phi(e) = 1$. اگر x معکوس پذیر باشد، آنگاه

$$\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1$$

بنابراین $\phi(x) \neq 0$. □

قضیه ۵.۲.۱ گیریم A یک جبر باناخ، $x \in A$ و $||x|| < 1$. داریم

(a): $e - x$ **معکوس پذیر است.**

(b): $||(e-x)^{-1} - e - x|| \leq \frac{||x||^2}{1-||x||}$

(c): **برای هر هومورفیسم مختلط** ϕ **بر**A، $|\phi(x)| < 1$. **بلاخص،** ϕ **پیوسته است.**

برهان. چون $||x^n|| \leq ||x||^n$ و $||x|| < 1$، دنباله‌ی

$$s_n = e + x + ... + x^n \qquad (۱)$$

یک دنباله‌ی کوشی در A است. چون A تّام است، نقطه‌ای مانند $s \in A$ هست که $s_n \to s$. چون $x^n \to 0$ و

$$s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n$$

پیوستگی ضرب نتیجه می‌دهد که s معکوس $e - x$ است.

اکنون بنا به (۱)

$$||s - e - x|| = ||x^2 + x^3 + ...|| \leq \sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \frac{||x||^2}{1 - ||x||}$$

بالاخره، گیریم $\lambda \in \mathbb{C}$ و $|\lambda| \geq 1$. بنابه (a)، $e - \lambda^{-1}x$ معکوس پذیر است. پس بنا به قضیّه‌ی (۴.۲.۱)

$$1 - \lambda^{-1}\phi(x) = \phi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$$

پس $\phi(x) \neq \lambda$ و حکم ثابت است. □

۳.۱ طیف

گیریم A یک جبر باناخ و $G = G(A)$ مجموعه‌ی کلیّه‌ی عناصر معکوس پذیر A باشد. اگر $x \in G$ و $y \in G$، آنگاه $y^{-1}x$ معکوس $x^{-1}y$ و لذا $x^{-1}y \in G$. پس G یک گروه است.

تعریف ۱.۳.۱ اگر $x \in A$، طیف x عبارت است از

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G(A)\}$$

متمّم $\sigma(x)$ را مجموعه‌ی حلّال $(resolvent)$ x گوییم.

شعاع طیفی x عبارت است از

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \tag{۱}$$

این عبارت است از شعاع کوچکترین قرص بسته در $\mathbb{C}$ به مرکز 0 که $\sigma(x)$ را در بر دارد. واضح است که اگر $\sigma(x)$ تهی باشد (۱) بی معنی خواهد بود. امّا همان طور که نشان خواهیم داد همواره $\sigma(x) \neq \phi$.

قضیه ۲.۳.۱ گیریم A یک جبر باناخ، $x \in G(A)$ ، $h \in A$ و $||h|| < \frac{1}{2}||x^{-1}||^{-1}$. در این صورت

$$x + h \in G(A)$$

و

$$||(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}|| \leq 2||x^{-1}||^3||h||^2$$

برهان. چون

$$x + h = x(e + x^{-1}h)$$

و

$$||x^{-1}h|| < \frac{1}{2}$$

داریم $x + h \in G(A)$ و نرم سمت راست اتّحاد

$$(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}$$

حداکثر $2||x^{-1}h||^2||x^{-1}||$ است. □

قضیه ۳.۳.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه $G(A)$ زیر مجموعه‌ی بازی از A است و نگاشت $x \to x^{-1}$ یک هومورفیسم از $G(A)$ بروی $G(A)$ است.

برهان. باز بودن $G(A)$ و اینکه $x \to x^{-1}$ پیوسته است از قضیّه‌ی قبل نتیجه می‌شود. چون $x \to x^{-1}$، $G(A)$ را بروی $G(A)$ می‌نگارد و چون معکوس آن خودش است، این نگاشت یک همئومورفیسم است. □

قضیه ۴.۳.۱ گیریم A یک جبر باناخ و $x \in A$ باشد. در این صورت

(a): طیف $\sigma(x)$ فشرده و ناتهی است.

(b): شعاع طیفی $\rho(x)$ در رابطه‌ی زیر صدق می کند

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \inf_n \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{۱}$$

قابل ذکر است که وجود حدّ (۱) قسمتی از نتیجه می‌باشد و نامساوی

$$\rho(x) \leq \|x\| \tag{۲}$$

در فرمول شعاع طیفی (۱) مستطر است.

برهان. (a): اگر $|\lambda| > \|x\|$، آنگاه

$$e - \lambda^{-1}x \in G(A)$$

و لذا

$$\lambda e - x \in G(A)$$

بنابرین $\lambda \notin \sigma(x)$. این (۲) را ثابت می‌کند. بالاخص $\sigma(x)$ یک مجموعه‌ی محدود است. برای اثبات این که $\sigma(x)$ بسته است، تابع $g : \mathbb{C} \longrightarrow A$ را با ضابطه‌ی $g(\lambda) = \lambda e - x$ تعریف می‌کنیم. g پیوسته بوده و چون

$$\mathbb{C} \setminus \sigma(x) = g^{-1}(G(A))$$

$\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ باز و لذا $\sigma(x)$ بسته است.

گیریم $\sigma(x) = \varnothing$ (فرض خلف). فرض کنیم $f \in A^*$ دلخواه باشد. تابع $\phi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی

$$\phi(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1}) \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

تابعی تّام است زیرا

$$\begin{aligned}
\frac{\phi(\mu) - \phi(\lambda)}{\mu - \lambda} &= f\left(\frac{(\mu e - x)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1}}{\mu - \lambda}\right) \\
&= f\left(\frac{(\mu e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}(\lambda e - x - \mu e + x)}{\mu - \lambda}\right) \\
&= f\left(-(\mu e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}\right) \longrightarrow -f((\lambda e - x)^{-2}) \qquad (\mu \to \lambda)
\end{aligned}$$

امّا

$$\begin{aligned}
|\phi(\lambda)| &\leq |f\| \, \|(\lambda e - x)^{-1}\| = \frac{\|f\|}{|\lambda|}\|(e - \lambda^{-1}x)^{-1}\| \leq \frac{\|f\|}{|\lambda|}\left\|e + \frac{x}{\lambda} + \frac{x^2}{\lambda^2} + ...\right\| \\
&\leq \frac{\|f\|}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\|x\|^n}{|\lambda|^n} = \frac{\|f\|}{|\lambda|}\frac{1}{1 - \frac{\|x\|}{|\lambda|}} = \frac{\|f\|}{|\lambda| - \|x\|} \longrightarrow 0 \qquad (|\lambda| \to \infty)
\end{aligned}$$

بنابراین ϕ محدود است . پس بنا به قضیّه‌ی لیوویل ϕ ثابت و با توّجه به

$$|\phi(\lambda)| \longrightarrow 0 \qquad (|\lambda| \to \infty)$$

داریم $\phi = 0$.

چون به ازای هر $f \in A^*$ و هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $f((\lambda e - x)^{-1}) = 0$ ، لذا به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $(\lambda e - x)^{-1} = 0$. بالاخص $x^{-1} = 0$، و لذا $0 = x^{-1}x = e$ که این یک تناقض است (زیرا $\|e\| = 1$).

(b): $x \in A$ را ثابت در نظر می‌گیریم. اگر n عددی طبیعی، λ عددی مختلط و $\lambda^n \notin \sigma(x^n)$ آنگاه با ضرب طرفین اتّحاد

$$x^n - \lambda^n e = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + ... + \lambda^{n-1}e)$$

در $(x^n - \lambda^n e)^{-1}$ نتیجه می‌شود که $x - \lambda e$ معکوس پذیر است و $\lambda \notin \phi(x)$ بنابراین اگر $\lambda \in \sigma(x)$ آنگاه $\lambda^n \in \phi(x^n)$ $(n = 1, 2, ...)$، و لذا

$$|\lambda^n| \leq \|x^n\|$$

پس

$$|\lambda| \leq \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

که این نتیجه می‌دهد:

$$\rho(x) \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \tag{۳}$$

اکنون اگر $|\lambda| > \|x\|$، به‌راحتی دیده می‌شود

$$(\lambda e - x)\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n = e \tag{۴}$$

بنابراین سری فوق برابر است با $(\lambda e - x)^{-1}$. فرض کنیم $f \in A^*$ دلخواه باشد. تابع

$$\phi(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1}) \qquad (\lambda \notin \sigma(x))$$

را در نظر می‌گیریم. با توجه به (۴) و پیوستگی f داریم

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x^n)\lambda^{-n-1} \qquad (|\lambda| > \|x\|) \tag{۵}$$

به مانند اثبات (a)، ϕ در خارج $\sigma(x)$ و درنتیجه بر $\{\lambda : |\lambda| > \rho(x)\}$ هولومورفیک است . بنابراین سری توانی (۵) برای هر λ که $|\lambda| > \rho(x)$ همگرا به $\phi(\lambda)$ است.

توضیح. تابع $\psi(z) = \phi(\frac{1}{z})$ بر $|z| < \frac{1}{\rho(x)}$ هولومورفیک بوده و بر $|z| < \frac{1}{\|x\|}$ داریم

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x^n)z^{n+1}$$

لذا با توّجه به یکتایی بسط سری توانی خواهیم داشت

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x^n)z^{n+1} \qquad \left(|z| < \frac{1}{\rho(x)}\right)$$

پس با قرار دادن $z = \frac{1}{\lambda}$ خواهیم داشت

$$\phi(\lambda) = \psi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} f(x^n)\lambda^{-n-1} \qquad (|\lambda| > \rho(x))$$

بالاخص خواهیم داشت

$$\sup_n |f(\lambda^{-n}x^n)| < \infty \qquad (|\lambda| > \rho(x))$$

$\star$

برای هر $f \in A^*$ و لذا به ازاء هر $|\lambda| > \rho(x)$ دنباله‌ی $\{\lambda^{-n}x^n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌طورضعیف محدود است. حال چون در

هر فضای موضعاً محدّب مجموعه های به‌طور ضعیف محدود به‌طور قوی محدودند (و بالعکس)، به ازاء هر λ که $|\lambda| > \rho(x)$، عدد حقیقی $C(\lambda)$ موجود است به‌طوری که

$$\|\lambda^{-n}x^n\| \leq C(\lambda) \qquad (n = 1, 2, 3, ...)$$

پس برای هر λ که $|\lambda| > \rho(x)$،

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|[C(\lambda)]^{\frac{1}{n}} \qquad (n = 1, 2, 3, ..)$$

بنابراین

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| \qquad (|\lambda| > \rho(x))$$

و لذا با گرفتن اینفیموم از سمت راست خواهیم داشت

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x) \tag{٦}$$

اکنون (٣) و(٦) تساوی سمت چپ (١) را نتیجه می‌دهند.

برای اثبات تساوی دوّم در (٢)، قرار می‌دهیم

$$r = \inf_{n} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

گیریم $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. عدد طبیعی m موجود است به‌طوری که

$$\|x^m\|^{\frac{1}{m}} \leq r + e$$

فرض می‌کنیم n عدد طبیعی دلخواهی باشد. اعداد صحیح p, q موجودند که

$$n = pm + q \qquad (0 \leq q \leq m - 1; p \geq 0)$$

پس

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x^{pm}x^q\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^{pm}\|^{\frac{1}{n}}\|x^q\|^{\frac{1}{n}} \leq \|x^m\|^{\frac{p}{n}}\|x\|^{\frac{q}{n}}$$

و لذا

$$\|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (r + \epsilon)^{\frac{mp}{n}}\|x\|^{\frac{q}{n}}$$

حال اگر $n \to \infty$، آنگاه $\frac{q}{n} \to 0$، و از آنجا که $1 = \frac{pm}{n} + \frac{q}{n}$، داریم $\frac{pm}{n} \longrightarrow 1$. پس

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq (r+\epsilon) \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x\|^{\frac{q}{n}} \leq (r+\epsilon)$$

حال چون ϵ دلخواه است خواهیم داشت

$$\limsup_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r \qquad (۷)$$

از طرف دیگر با توجّه به تعریف r ، داریم

$$r \leq \liminf_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \qquad (۸)$$

پس با توجّه به (۷) و (۸)،

$$r = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$

و حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۵.۳.۱ اگر A یک جبر باناخ، $x_1, x_2 \in A$ و $x_1x_2 = x_2x_1$ باشد آنگاه

$$\rho(x_1x_2) \leq \rho(x_1)\rho(x_2) \qquad (۱)$$

$$\rho(x_1+x_2) \leq \rho(x_1)+\rho(x_2) \qquad (۲)$$

برهان.

$$\begin{aligned}\rho(x_1x_2) &= \lim_{n\longrightarrow\infty} \|(x_1x_2)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_1^n x_2^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_1^n\|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\longrightarrow\infty} \|x_2^n\|^{\frac{1}{n}} \\ &= \rho(x_1)\rho(x_2)\end{aligned}$$

و (۱) بر قرار است. برای اثبات (۲) داریم

$$(x_1+x_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k}$$

و لذا

$$\|(x_1+x_2)^n\| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \|x_1^k\| \|x_2^{n-k}\|$$

گیریم $\rho(x_1) < \alpha_1$ و $\rho(x_2) < \alpha_2$ دلخواه باشند. عدد طبیعی N (وابسته به α_1 و α_2) هستند که

$$n \geq N \Longrightarrow \|x_1^n\|^{\frac{1}{n}} < \alpha_1$$

$$n \geq N \Longrightarrow \|x_2^n\|^{\frac{1}{n}} < \alpha_2$$

اکنون برای هر $n > 2N$ داریم

$$\begin{aligned}
\|(x_1+x_2)^n\| &\leq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\|x_1^k\|\|x_2^{n-k}\| + \sum_{k=N+1}^{n-N}\binom{n}{k}\|x_1^k\|\|x_2^{n-k}\| \\
&\quad + \sum_{k=n-N+1}^{n}\binom{n}{k}\|x_1^k\|\|x_2^{n-k}\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\|x_1\|^k\alpha_2^{n-k} + \sum_{k=N+1}^{n-N}\binom{n}{k}\alpha_1^k\alpha_2^{n-k} + \sum_{k=n-N+1}^{n}\binom{n}{k}\alpha_1^k\|x_2\|^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{N}\binom{n}{k}\alpha_1^k\alpha_2^{n-k}\frac{\|x_1\|^k}{\alpha_1^k} + \sum_{k=N+1}^{n-N}\binom{n}{k}\alpha_1^k\alpha_2^{n-k} \\
&\quad + \sum_{k=n-N+1}^{n}\binom{n}{k}\alpha_1^k\alpha_2^{n-k}\frac{\|x_2\|^{n-k}}{\alpha_2^{n-k}} \\
&\leq M\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\alpha_1^k\alpha_2^{n-k} = M(\alpha_1+\alpha_2)^n
\end{aligned}$$

که در آن

$$M = \max_{0\leq k\leq N}\frac{\|x_1\|^k}{\alpha_1^k} + 1 + \max_{0\leq k\leq N}\frac{\|x_2\|^k}{\alpha_2^k}$$

بنابراین

$$\|(x_1+x_2)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}(\alpha_1+\alpha_2) \qquad (n > 2N)$$

و لذا

$$\rho(x_1+x_2) = \lim_{n\longrightarrow\infty}\|(x_1+x_2)^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \alpha_1+\alpha_2$$

حال اگر $\alpha_1 \to \rho(x_1)$ و $\alpha_2 \to \rho(x_2)$ خواهیم داشت

$$\rho(x_1+x_2) \leq \rho(x_1)+\rho(x_2)$$

□

قضیه ۱.۳.۶ (گلفاند – مازور) اگر A یک جبر باناخ باشد به‌طوری که هر عضو ناصفر آن معکوس پذیر باشد آنگاه A به‌طور ایزومتری با میدان اعداد مختلط ایزومورفیک است.

برهان. اگر $x \in A$ و $\lambda_1 \neq \lambda_2$، آنگاه حداکثر یکی از عناصر $\lambda_1 e - x$ و $\lambda_2 e - x$ صفر است، بنابراین حدّاقل یکی از آنها معکوس پذیر است. از آنجا که $\sigma(x)$ ناتهی است، $\sigma(x)$ دقیقاً از یک نقطه که آن را $\lambda(x)$ می‌نامیم تشکیل شده است. از آنجا که $\lambda(x)e - x$ معکوس پذیر نیست، داریم

$$\lambda(x)e - x = 0$$

و یا $x = \lambda(x)e$. اکنون نگاشت $x \xrightarrow{\lambda} \lambda(x)$ یک ایزومورفیسم از A به‌روی $\mathbb{C}$ بوده که همچنین یک ایزومتری است، زیرا

$$|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$$

$\square$

مثال: گیریم Ω یک فضای فشرده‌ی هاسدورف و $C(\Omega)$ فضای باناخ کلیّه‌ی توابع مختلط پیوسته بر Ω با نرم

$$\|f\| = \max_{t \in \Omega} |f(t)|$$

باشد. ضرب را به‌طور معمول تعریف می کنیم:

$$(fg)(t) = f(t)g(t)$$

واضح است که

$$\|fg\| \leq \|f\|\|g\|$$

و لذا $C(K)$ یک جبر باناخ جابجایی می باشد که واحد آن تابع ثابت ۱ است. اگر K یک مجموعه‌ی متناهی متشکّل از مثلاً n نقطه باشد، آنگاه $C(K)$ همان $\mathbb{C}^n$ با ضرب مؤلفه‌وار است. در حالت خاّص $n = 1$، ساده‌ترین جبر باناخ یعنی $\mathbb{C}$ با قدر مطلق به جای نرم را به دست می‌آوریم.

مثال: گیریم X یک فضای باناخ باشد. در این صورت $B(X)$ جبر کلیّه‌ی عملگرهای خطّی و محدود بر X یک جبر باناخ نسبت به نرم عملگری است. عملگر همانی I عضو واحد است و $\|I\|$.

اگر $\dim(X) = n < \infty$، آنگاه $B(X)$ با جبر کلیّه‌ی ماتریس های مختلط $n \times n$ ایزومورفیک می‌باشد. اگر $\dim(X) > 1$، آنگاه $B(X)$ جابجایی نیست.

هر زیر جبر بسته $B(X)$ که I را شامل باشد یک جبر باناخ است.

تمرین: گیریم A یک فضای باناخ باشد. نشان دهید فضای باناخ X موجود است که A با جبر بسته‌ای از $B(X)$ بطور توپولوژیکی ایزومورفیک است.

مثال: $L^1 = L^1(\mathbb{R}^1) = L_1(-\infty,\infty)$ فضای باناخ کلیّه‌ی توابع انتگرال پذیر مختلط بر خطّ حقیقی با نرم

$$\|f\| = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$$

باشد. ضرب در $L_1(-\infty,\infty)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(f*g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\, dt$$

چون

$$\begin{aligned}\|f*g\| &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\, dt\right|\, dx \le \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)|\, dt\ dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|\, dx = \|f\|\|g\|\end{aligned}$$

$L_1(-\infty,\infty)$ یک جبر باناخ جابجایی است. می‌توان نشان داد که $L_1(-\infty,\infty)$ دارای واحد نیست.

مثال: فرض کنیم $l^1 = l^1(\mathbb{Z}) = l^1(-\infty,\infty)$ فضای باناخ کلیّه‌ی دنباله‌های مختلط $x = \{x_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ با نرم

$$\|x\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$$

باشد. اگر ضرب به صورت

$$(x*y)(n) = (x*y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}y_k$$

تعریف شود آنگاه $l_1(-\infty,\infty)$ تبدیل به یک جبر باناخ جابه‌جایی با واحد $\delta = \{\delta_{0,n}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ است که در آن

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\ne j \end{cases}$$

دلتای کرونکر است:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |x_{n-k}y_k| \le \|x\|_\infty \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k| = \|x\|_\infty \|y\|_1 < \infty$$

خوش تعریفی:

$$\begin{aligned}\|x*y\|_1 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(x*y)_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}y_k\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}||y_k| \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |y_k| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_{n-k}| = \|y\|\|x\| < \infty\end{aligned}$$

جابه‌جایی:

$$(x*y)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k}y_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} = (y*x)_n$$

شرکت پذیری:

$$\begin{aligned}((x*y)*z)_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (x*y)_k z_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l y_{k-l} z_{n-k} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{k-l} z_{n-l-(k-l)} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z_{n-l-k} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_l (y*z)_{n-l} = (x*(y*z))_n\end{aligned}$$

توزیع پذیری:

$$\begin{aligned}(x*(y+z))_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (y+z)_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k z_{n-k} \\ &= (x*y)_n + (x*z)_n \\ ((\alpha x)*y))_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha x)_k y_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha x_k y_{n-k} = \alpha \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{n-k} \\ &= \alpha (x*y)_n \\ (x*(\alpha y))_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \alpha y_{n-k} = \alpha (x*y)_n\end{aligned}$$

عضو واحد:

$$\begin{aligned}(x*\delta)_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{n-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_{0,n-k} = x_n \\ \|\delta\| &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\delta_{0,n}| = |\delta_{0,0}| = 1\end{aligned}$$

۴.۱ ضرب آرنس

گیریم A یک جبر باناخ باشد و A' و A'' را به ترتیب دوگان اوّل و دوگان دوّم A می‌گیریم. گیریم $x, y \in A$، $f \in A'$ و $F, G \in A''$ باشند. قرار می‌دهیم

$$(fx)(y) = f(xy) \quad , \quad (Ff)(x) = F(fx) \quad , \quad (FG)(f) = F(Gf)$$

داریم

$$f.x \in A \quad , \quad F.f \in A' \quad , \quad F.G \in A''$$

$$\|f.x\| \leq \|f\|\|x\| \quad , \quad \|F.f\| \leq \|F\|\|f\| \quad , \quad \|F.G\| \leq \|F\|\|G\|$$

هر یک از ضرب ها نسبت به هر یک از عوامل خطّی است و $F.(G.H) = (F.G).H$. بنابراین A'' یک جبر باناخ نسبت به ضرب FG است. زیرا:

$$\begin{aligned}
(f.x)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) &= f(x(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)) = \alpha_1 f(xy_1) + \alpha_2 f(xy_2) \\
&= \alpha_1 (f.x)(y_1) + \alpha_2 (f.x)(y_2)
\end{aligned}$$

$$|(f.x)(y)| : \;=\; |f(xy)| \leq \|f\|\|xy\| \leq \|f\|\|x\|\|y\| \Longrightarrow \|f.x\| \leq \|f\|\|x\|$$

$$\begin{aligned}
(f.(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2))(y) &= f((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)y) = \alpha_1 f(x_1 y) + \alpha_2 f(x_2 y) \\
&= \alpha_1 (f.x_1)(y) + \alpha_2 (f.x_2)(y) = \big(\alpha_1 (f.x_1) + \alpha_2 (f.x_2)\big)(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2).x)\,(y) &= (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)(xy) = \alpha_1 f_1(xy) + \alpha_2 f_2(xy) \\
&= (\alpha_1 (f_1.x) + \alpha_2 (f_2.x))\,(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(F.f)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= F(f.(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = F(\alpha_1 (f.x_1) + \alpha_2 (f.x_2)) \\
&= \alpha_1 F(f.x_1) + \alpha_2 F(f.x_2) = \alpha_1 (F.f)(x_1) + \alpha_2 (F.f)(x_2)
\end{aligned}$$

$$|(F.f)(x)| = |F(f.x)| \leq \|F\|\|f.x\| \leq \|F\|\|f\|\|x\| \Longrightarrow \|F.f\| \leq \|F\|\|f\|$$

$$(F.(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2))(x) = F((\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2).x) = F(\alpha_1 (f_1.x) + \alpha_2 (f_2.x))$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha_1 F(f_1.x) + \alpha_2 F(f_2.x) = (\alpha_1(F.f_1) + \alpha_2(F.f_2))(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2).f)(x) &= (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)(f.x) = \alpha_1 F_1(f.x) + \alpha_2 F_2(f.x) \\
&= (\alpha_1(F_1.f) + \alpha_2(F_2.f))(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(F.G)(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) &= F(G.(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2)) = F(\alpha_1(G.f_1) + \alpha_2(G.f_2)) \\
&= \alpha_1 F(G.f_1) + \alpha_2 F(G.f_2) = \alpha_1(F.G)(f_1) + \alpha_2(F.G)(f_2)
\end{aligned}
$$

$$
|(F.G)(f)| = |F(G.f)| \leq \|F\|\|G.f\| \leq \|F\|\|G\|\|f\| \Longrightarrow \|F.G\| \leq \|F\|\|G\|
$$

$$
\begin{aligned}
(F.(\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2))(f) &= F((\alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2).f) = F\big(\alpha_1(G_1.f) + \alpha_2(G_2.f)\big) \\
&= \alpha_1 F(G_1.f) + \alpha_2 F(G_2.f) = \big(\alpha_1(F.G_1) + \alpha_2(F.G_2)\big)(f)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
((\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2).G)(f) &= (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2)(G.f) = \alpha_1 F_1(G.f) + \alpha_2 F_2(G.f) \\
&= \alpha_1(F_1.G)(f) + \alpha_2(F_2.G)(f) = (\alpha_1(F_1.G) + \alpha_2(F_2.G))(f)
\end{aligned}
$$

چون

$$
\begin{array}{ll}
((F.G).H)(f) = (F.G)(H.f) = F(G.(H.f)), & (F.(G.H))(f) = F((G.H).f) \\
(G.(H.f))(x) = G((H.f).x), & ((G.H).f)(x) = (G.H)(f.x) = G(H.(f.x)) \\
((H.f).x)(y) = (H.f)(xy) = H(f.(xy)), & (H.(f.x))(y) = H((f.x).y) \\
(f.(xy))(z) = f((xy)z), & ((f.x).y)(z) = (f.x)(yz) = f(x(yz))
\end{array}
$$

لذا

$$
(F.G).H = F.(G.H)
$$

تمرین: بستار هر ایده‌آل واقعی I در یک جبر باناخ واحددار A یک ایده‌آل واقعی (سره) است.

برهان. واضح است که بستار هر ایده‌آل یک ایده‌آل است. امّا هیچ ایده‌آل واقعی شامل عنصری معکوس پذیر نیست. بنابراین $I \cap G = \phi$. پس $\bar{I} \cap G = \phi$ زیرا G باز است. پس $\bar{I} \neq A$. □

۵.۱ مفاهیمی درباره‌ی جبرهای بدون واحد

در این بخش در ارتباط با جبرهای بدون واحد مفاهیم زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم: واحدهای تقریبی، عناصر شبه معکوس پذیر و ایده‌آل‌های مدولار.

تعریف ۱.۵.۱ گیریم A یک جبر باناخ باشد. شبکه‌ی (δ_α) از عناصر A را یک واحد تقریبی برای A گوییم هر گاه به ازای هر $x \in A$

$$\lim_\alpha \delta_\alpha x = \lim_\alpha x\delta_\alpha = x$$

و شبکه‌ی $\|\delta_\alpha\|$ محدود باشد. به طریق مشابه واحد تقریبی چپ و راست تعریف می‌شود.

مثال: گیریم $A = L_1(-\infty, +\infty)$ باشد. قرار می‌دهیم

$$\delta_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2} & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$$

داریم $\|\delta_n\| = 1$ و

$$(f * \delta_n)(x) = \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(x-y)\,dy$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \|f - f*\delta_n\| &= \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}[f(x)-f(x-y)]\,dy\right|dx \\ &\leq \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}|f(x)-f(x-y)|\,dy\,dx \\ &= \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x-y)|\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(y)\,dy\,dx \\ &= \frac{n}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]}(y)\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f(x-y)|\,dx\,dy \\ &= \frac{n}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\|f-f_y\|_1\,dy \end{aligned}$$

که در آن $f_y(x) = f(x-y)$. امّا می‌دانیم نگاشت $y \to f_y$ پیوسته‌ی (یکنواخت) است. بالاخص بنا به پیوستگی در نقطه‌ی صفر، به ازای $\epsilon > 0$ دلخواه، Nای هست که

$$|y| < \frac{1}{N} \Longrightarrow \|f - f_y\|_1 < \epsilon$$

پس به ازای هر $n \geq N$

$$\|f - f * \delta_n\| \leq \frac{n}{2} \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \epsilon \, dy = \epsilon$$

پس دنباله‌ی (δ_n) یک واحد تقریبی برای $L_1(-\infty, \infty)$ است.

تبصره: اگر (δ_α) یک واحد تقریبی در جبر باناخ A با واحد e باشد آنگاه با اختیارکردن $x = e$، خواهیم داشت

$$\lim_\alpha \delta_\alpha = e$$

بنابراین اگر یک واحد تقریبی در A واگرا باشد آنگاه A بدون واحد است.

قضیه ۲.۵.۱ گیریم A یک جبر باناخ با واحد تقریبی چپ باشد، یعنی

$$\sup_\alpha \|\delta_\alpha\| = k < \infty \qquad \text{و} \qquad \lim_\alpha \delta_\alpha x = x$$

فرض کنیم $(x_n)_{n \geq 1}$ دنباله‌ای از عناصر A همگرا به صفر باشد. در این صورت دنباله‌ی $(y_n)_{n \geq 1} \subseteq A$ و عضو $z \in A$ موجودند بطوری که

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = 0$$

و به ازای هر n، $x_n = zy_n$.

برهان. اگر $A = \{0\}$ حکم بدیهی است. گیریم $A \neq \{0\}$. فرض می‌کنیم $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ واحدسازی A باشد. a را با $(a, 0)$ یکی گرفته و لذا $A = \{(a, 0) : a \in A\}$ یک ایده‌آل بسته‌ی دو طرفه از A_1 است. عدد $\rho > 0$ را چنان می‌گیریم که $\rho(k+1) < \frac{1}{2}$. پس

$$0 < \rho < \frac{1}{k+1} \tag{1}$$

و

$$\frac{\rho(k+1)}{1 - \rho(k+1)} < 1 \tag{2}$$

تابعک خطّی $\phi : A_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه‌ی

$$\phi(x+\lambda e)=\lambda \qquad (x\in A, \lambda\in\mathbb{C})$$

در نظر می‌گیریم. ϕ یک تابعک خطّی پیوسته ($|\phi(x+\lambda e)|=|\lambda|\le|\lambda|+\|x\|=\|x+\lambda e\|$) بر A_1 با فضای پوچ A است. داریم

$$\phi(e)=1$$

$$\phi((x+\lambda e)(y+\mu e))=\phi(xy+\lambda y+\mu x+\lambda\mu e)=\lambda\mu=\phi(x+\lambda e)\phi(y+\mu e) \quad (x,y\in A,\mu,\lambda\in\mathbb{C})$$

بنابراین به ازای هر عضو معکوس پذیر u در A_1 داریم

$$1=\phi(e)=\phi(uu^{-1})=\phi(u)\phi(u^{-1})$$

و یا $\phi(u^{-1})=[\phi(u)]^{-1}$ (چنین تابعک ϕ را یک تابعک خطّی ضربی بر A_1 می‌گویند). داریم

$$(x+\lambda e)-\phi(x+\lambda e).e\in A \qquad (x\in A,\lambda\in\mathbb{C}) \tag{۳}$$

زیرا تصویر آن تحت ϕ عبارت است از

$$\phi(x+\lambda e)-\phi(x-\lambda e)\phi(e)=0$$

$\delta_1\in(\delta_\alpha)$ را اختیار می‌کنیم. اگر $\delta_1,\delta_2,...,\delta_s\in(\delta_\alpha)$ اختیار شده باشد قرار می‌دهیم

$$t_s=(e_\rho+\rho(e-\delta_1))...(e+\rho(e-\delta_s)) \tag{۴}$$

$$z_s=\big(e+\rho(e-\delta_s)\big)^{-1}...\big(e+\rho(e-\delta_1)\big)^{-1} \tag{۵}$$

چون هر $\|\rho(e-\delta_i)\|\le\rho(k+1)<1$، z_s خوش تعریف است. به ازای هر n قرار می‌دهیم

$$y_{n,s}=t_sx_n \tag{۶}$$

بنابراین

$$x_n=z_sy_{n,s} \tag{۷}$$

چون

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

عدد طبیعی $N(s) \geq s$ موجود است به‌طوری که

$$\|x_n\| \leq 2^{-s}\|t_s\|^{-1} \qquad (n \geq N(s)) \tag{۸}$$

بنابراین

$$\|y_{n,s}\| \leq 2^{-s} \qquad (n \geq N(s)) \tag{۹}$$

هدف این است که دنباله‌ی (δ_i) چنان گردد که دنباله‌های z_s و $y_{n,s}$ در A_1 نسبت به s همگرا باشند. فرض کنیم $\delta_1, \delta_2, ...\delta_p \in (\delta_\alpha)$ چنان انتخاب شده باشند که

$$\|y_{n,i} - y_{n,i+1}\| \leq 2(1+\rho)^{-i} \qquad (i = 1,2,...,p-1, n < N(i)) \tag{۱۰}$$

و

$$\|z_i - z_{i+1}\| \leq 2(1+\rho)^{-i} \qquad (i = 1,2,...,p-1) \tag{۱۱}$$

برای $p = 1$، (۱۰) و(۱۱) به انتفای مقدم برقرارند. $\delta_{p+1} \in (\delta_\alpha)$ را چنان اختیار می کنیم که (۱۰) و(۱۱) برای $i = p$ و هر $n < N(p)$ بر قرار باشد. چون (δ_α) واحد تقریبی چپ است و بنا به (۳)، $R_p = z_p - \phi(z_p)e \in A$، اندیس‌های α_0 و α_1 موجودند به‌طوری که

$$\alpha > \alpha_0 \quad \Longrightarrow \quad \|\rho t_p(x_n - \delta_\alpha x_n)\| \leq \rho\|t_p\|\|x_n - \delta_\alpha x_n\| \leq 2(1+\rho)^{-p} \tag{۱۲}$$

$$(n = 1,2,..,N(p)-1)$$

و

$$\alpha > \alpha_1 \quad \Longrightarrow \quad \|R_p - \delta_\alpha R_p\| \leq \frac{1-\rho(k+1)}{\rho}(1+\rho)^{-p} \tag{۱۳}$$

اکنون $\delta_{\rho+1} \in \{\delta_\alpha : \alpha > \alpha_0, \alpha > \alpha_1\}$ را اختیار می‌کنیم . پس (۱۲) و(۱۳) برای δ_{p+1} به جای δ_α بر قرار هستند. چون

$$y_{n,p} - y_{n,p+1} = t_p x_n - t_p(e + \rho(e - \delta_{p+1}))x_n = -\rho t_p(x_n - \delta_{p+1}x_n) \tag{۱۴}$$

بنا به (۱۲)، (۱۰) برای $i=p$ و $n<N(p)$ برقرار است. داریم

$$z_{p+1}=(e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}z_p$$

و لذا

$$z_p-z_{p+1}=(e+\rho(e-\delta_{p+1}))z_{p+1}-z_{p+1}=\rho(e-\delta_{p+1})(e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}z_p \tag{۱۵}$$

چون

$$(e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}[-\rho(e-\delta_{p+1})]^n$$

با $e-\delta_{p+1}$ جابه‌جا می‌شود، داریم

$$z_p-z_{p+1}=\rho(e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}(z_p-\delta_{p+1}z_p)$$

امّا

$$\phi(z_s)=[\phi(e+\rho(e-\delta_s))]^{-1}...[\phi(e+\rho(e-\delta_s))]^{-1}=(1+\rho)^{-s} \tag{۱۶}$$

و بنابراین $R_p=z_p-(1+\rho)^{-p}e$. پس

$$z_p-\delta_{p+1}z_p=R_p-\delta_{p+1}R_p+(1+\rho)^{-p}(e-\delta_{p+1})$$

و لذا

$$z_p-z_{p+1}=\rho(e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}(R_p-\delta_{p+1}R_p)+\rho(1+\rho)^{-p}(e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}(e-\delta_{p+1}) \tag{۱۷}$$

می‌توان نرم جملات طرف راست رابطه‌ی (۱۷) را بر آورد نمود. داریم

$$\begin{aligned}\|e+\rho(e-\delta_{p+1}))^{-1}\| &= \|\sum_{n=0}^{\infty}-\rho(e-\delta_{p+1}))^n\|\leq\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\|e-\delta_{p+1}\|^n\leq\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(1+k)^n\\ &= \frac{1}{1-\rho(k+1}\end{aligned}$$

و لذا با توجّه به (۱۳)، (۱۷) و(۲)،

$$\begin{aligned}\|z_p-z_{p+1}\| &\leq \frac{\rho}{1-\rho_{k+1}}\|R_p-\delta_{p+1}R_p\|+(1+\rho)^{-1}\frac{\rho(k+1)}{1-\rho(k+1)}\\ &< (1+\rho)^{-p}+(1+\rho)^{-p}=2(1+\rho)^{-p}\end{aligned}$$

و لذا (۱۱) برای $i = p$ بر قرار است. با ادامه‌ی این روش به استقراء عناصر z_p و $y_{n,s}$ برای هر i,n یافت می‌شوند به‌طوری که (۱۰) و (۱۲) برای هر $n < N(i)$ برقرارند امّا برای هر $n \geq N(i)$ نیز با توجّه به (۸) داریم

$$\|y_{n,i} - y_{n,i+1}\| = \|t_i x_n - t_{i+1} x_n\| = \|(t_i - t_{i+1}) x_n\| =$$
$$= \|(t_i - t_i(e + \rho(e - \delta_i))) x_n\| = \| - \rho t_i (e - \delta_i) x_n\| \leq \rho \|t_i\| (1+k) 2^{-i} \|t_i\|^{-1}$$
$$\leq \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{(1+\rho)^i} \leq \frac{2}{(1+\rho)^i}$$

لذا به ازای هر i و هر n داریم:

$$\|y_{n,i} - y_{n,i+1}\| \leq \frac{2}{(1+\rho)^i} \qquad , \qquad \|z_i - z_{i+1}\| \leq \frac{2}{(1+\rho)^i} \qquad (۱۸)$$

بنابراین (z_i) وبه ازای هر n داریم، $(y_{n,i})$ همگرا می‌باشند گیریم

$$z = \lim_{i \to \infty} z_i \qquad \text{و} \qquad y_n = \lim_{i \to \infty} y_{n,i}$$

چون هر $y_{n,i} \in A$ داریم $y_n \in A$. همچنین با توجّه به پیوستگی ϕ و (۱۶)

$$\phi(z) = \lim_{i \to \infty} \phi(z_i) = \lim_{i \to \infty} (1+\rho)^{-i} = 0$$

و لذا $z \in \ker \phi = A$. بنابراین اگر $s \to \infty$ با توجّه به (۷)رابطه‌ی (۱) برقرار است. اکنون فقط باقی است ثابت کنیم $\lim_{n \to \infty} y_n = 0$. بنا به (۱۸) و اینکه $N(s) \geq s$ ، داریم

$$\begin{aligned} \|y_n - y_{n,s}\| &= \lim_{p \longrightarrow \infty} \|\sum_{i=s}^{p} (y_{n,i+1} - y_{n,i})\| \leq \sum_{i=s}^{\infty} \|y_{n,i+1} - y_{n,i}\| \\ &\leq \sum_{i=s}^{\infty} 2(1+\rho)^{-i} = \frac{2}{1 - \frac{1}{1+\rho}} (1+\rho)^{-s} = \frac{2(1+\rho)}{\rho} (1+\rho)^{-s} \\ &= \frac{2}{\rho} . \frac{1}{(1+\rho)^{s-1}} \end{aligned}$$

پس با توجّه به (۹)، به ازای هرs،

$$\|y_n\| \leq \frac{2}{\rho} \frac{1}{(1+\rho)^{s-1}} + 2^{-s} \qquad (n \geq N(s))$$

و لذا

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|y_n\| = 0$$

□

تمرین: صورت راست قضیه‌ی قبل را ثابت کنید: اگر A یک جبر باناخ و دارای واحد تقریبی راست باشد آنگاه برای هر دنباله‌ی $x_n \to 0$ از عناصر A دنباله‌ی $y_n \to 0$ از عناصر A و عضو $z \in A$ هست که $x_n = y_n z$ $(n = 1, 2, 3, ...)$.

نتیجه ۳.۵.۱ (قضیه‌ی تجزیه‌ی کوهن) گیریم A یک جبر باناخ و دارای واحد تقریبی چپ (یا راست) باشد. در این صورت هر $x \in A$ را می‌توان به صورت $x = yz$ نوشت که در آن $y, z \in A$. بطور معادل $A^2 = A$.

۶.۱ عناصر شبه معکوس پذیر

گیریم A یک جبر باناخ (بدون واحد) باشد. می‌نویسیم $A_1 = A \oplus +\{\lambda e\}$. اگر$x \in A$ و $e - x$ در A_1 معکوس راست داشته باشد آنگاه این معکوس راست باید به صورت $e - y$ بوده که در آن $y \in A$ و $(e - x)(e - y) = e$. رابطه اخیر را می‌توان فقط برحسب عناصر A نوشت یعنی $x + y - yx = 0$. به طریق مشابه $e - x$ دارای معکوس چپ در A_1 است اگر و فقط اگر $y \in A$ باشد که $x + y - yx = 0$.

تعریف ۱.۶.۱ گیریم A یک جبر باناخ باشد. می‌نویسیم

$$x \circ y = x + y - xy$$

عنصر $x \in A$ را شبه معکوس پذیر[1] چپ یا شبه منظم چپ گوییم هرگاه عنصری مانند $y \in A$ که آن را شبه معکوس راست x گوییم موجود باشد به طوری که $x \circ y = 0$. به همین ترتیب شبه معکوس پذیری راست تعریف می شود.

عنصر x شبه معکوس پذیر (شبه منظم) نامیده می‌شود هرگاه هم شبه معکوس پذیر راست و هم شبه معکوس پذیر چپ باشد. در این حالت عنصر منحصر به فرد $y \in A$ یافت می‌شود به طوری که $x \circ y = y \circ x = 0$. این y منحصر به فرد را به x^0 نمایش می‌دهیم.

[1] Quasi-invertible elements

اگر $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$، آنگاه می‌توان $T : A \to A_1$ را به صورت $Tx = e - x$ تعریف نمود. واضح است که

$$T(x \circ y) = e - x \circ y = e - x - y + xy = (e - x)(e - y) = T(x)T(y)$$

و لذا ضرب $\circ$ به وسیله T به ضرب معمولی تبدیل می شود. نگاشت T مجموعه کلیه عناصر شبه معکوس پذیر A را به صورت یک به یک به توی مجموعه عناصر معکوس پذیر A_1 تصویر می‌کند. بنابراین مجموعه کلیه عناصر شبه معکوس پذیر تحت عمل $\circ$ یک گروه تشکیل می‌دهد که عضو واحد آن صفر است:

$$0 \in q - inv(A) \neq \phi$$

$$T(x \circ (y \circ z)) = TxT(y \circ z) = T(x)(T(y)T(z)) = (T(x)T(y))T(z) = T(x \circ y)T(z) = T\big((x \circ y) \circ z\big)$$

از آنجا که T یک به یک است لذا:

$$\begin{aligned} x \circ (y \circ z) &= (x \circ y) \circ z \\ T(x \circ 0) &= T(x)T(0) = T(x)e = T(x) \quad \Rightarrow \quad x \circ 0 = x \\ T(0 \circ x) &= T(0)T(x) = eT(x) = T(x) \quad \Rightarrow \quad 0 \circ x = x \\ x \circ x^0 &= x^0 \circ x = 0 \end{aligned}$$

لم ۲.۶.۱ اگر A یک جبر باناخ باشد آنگاه کلیه عناصر $x \in A$ که $\| x \| < 1$ شبه معکوس پذیرند و

$$x^0 = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

برهان.

$$\| x \| < 1 \Rightarrow e - x \in inv(A_1), \qquad (e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

چون T یک هومومورفیسم بر$q - inv(A)$ است لذا:

$$T(x^0) = T(x)^{-1} = (e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = e - (-\sum_{n=1}^{\infty} x^n) = T(-\sum_{n=1}^{\infty} x^n)$$

و چون T یک به یک است داریم:

$$x^0 = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$$

$\square$

قضیه ۳.۶.۱ گروه کلیهٔ عناصر شبه معکوس پذیر در جبر باناخ باز است.

برهان. **طریقه اول:** می‌نویسیم $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$.

$$x \in q - inv(A) \Rightarrow x_1 = e - x \in inv(A_1)$$

چون $inv(A_1)$ باز است، در نتیجه:

$$\exists \delta > 0 \quad (y_1 \in A_1, \quad \| y_1 - x_1 \| < \delta \Rightarrow y_1 \in inv(A_1))$$

پس

$$\begin{aligned} & y \in A \ , \quad \| y - x \| < \delta \ \Rightarrow \quad \| (e-y) - x_1 \| = \| y - x \| < \delta \\ & \Rightarrow \quad e - y \in inv(A_1) \Rightarrow y \in q - inv(A) \end{aligned}$$

بنابراین $B_\delta(x) \subseteq q - inv(A)$ و در نتیجه $q - inv(A)$ باز است.

طریقه دوم: اگر x یک عنصر شبه معکوس پذیر در A باشد آنگاه $x^0 \in A$ هست که $x^0 \circ x = 0 = x \circ x^0$. پس به ازای هر $y \in A$ داریم:

$$\begin{aligned} x^0 \circ y &= x^0 + y - x^0 y = x^0 + y - x^0 y - \underbrace{x^0 \circ x}_{\circ} = x^0 + y - x^0 y - x^0 - x + x^0 x \\ &= y - x - x^0(y - x) = (e - x^0)(y - x) \end{aligned}$$

و لذا

$$\| x^0 \circ y \| \leq \| e - x^0 \| \| y - x \|$$

پس با توجه به لم (۲.۶.۱) اگر y به قدر کافی به x نزدیک باشد (مثلاً $\| y - x \| < \frac{1}{1 + \| e - x^0 \|}$) آنگاه $x^0 \circ y$ شبه معکوس پذیر است و لذا $z \in A$ هست که

$$z \circ x^0 \circ y = 0$$

که این نتیجه می دهد y شبه معکوس پذیر راست است. به طریق مشابه کلیه عناصری که به قدر کافی نزدیک به x باشند شبه معکوس پذیر چپ هستند. بنابراین یک همسایگی از x موجود است که هر عضو آن شبه معکوس پذیر است. $\square$

تعریف ۴.۶.۱ گیریم A یک جبر باناخ باشد. ایده‌آل چپ (راست) $I \subseteq A$ را (یک ایده‌آل چپ (راست)) مدولار گوییم هرگاه دارای واحد راست (چپ) به هنگ I باشد؛ یعنی عنصر $e_I^r(e_I^\ell)$ موجود باشد بطوری که به ازای هر $x \in A$، $x - xe_I^r \in I$ $(x - e_I^\ell x \in I)$. بوضوح عناصر e_I^r (e_I^ℓ) که در این تعریف آمده‌اند می‌توانند با عناصر $e_I^r + m$ $(e_I^\ell + m)$ که در آن $m \in I$ تعویض شوند. بعلاوه اگر I یک ایده‌آل مدولار چپ (راست) واقعی باشد آنگاه $e_I^r \notin I$ $(e_I^\ell \notin I)$. همچنین اگر $I \subseteq J$، I یک ایده‌آل چپ (راست) مدولار و J یک ایده‌آل چپ (راست) باشد آنگاه J نیز یک ایده‌آل چپ (راست) مدولار با واحد e_I^r (e_I^ℓ) می‌باشد. ایده‌آل دوطرفهٔ I را یک ایده‌آل مدولار گوییم هرگاه هم مدولار چپ و هم مدولار راست باشد. با توجه به مطالب فوق برای یک ایده‌آل مدولار I یک واحد به هنگ I موجود است؛ یعنی عنصری مانند e_I موجود است بطوریکه $x - xe_I \in I$ و $x - e_I x \in I$ برای هر $x \in A$، زیرا داریم $e_I^\ell - e_I^\ell e_I^r \in I$ و $e_r^I - e_I^\ell e_I^r \in I$، و لذا $e_I^\ell - e_I^r \in I$ و در نتیجه می‌توان $e_I^\ell = e_I^r + (e_I^\ell - e_I^r)$ را بجای e_I بکار برد.

لم ۵.۶.۱ هر ایده‌آل مدولار واقعی در یک ایده‌آل مدولار ماکسیمال قرار دارد.

برهان. نتیجه‌ای از لم زرن است. □

قضیه ۶.۶.۱ گیریم A یک جبر باناخ و I یک ایده‌آل چپ مدولار واقعی A با واحد e_I^r باشد. در اینصورت

$$I \cap \{x \in A : \|e_I^r - x\| < 1\} = \varnothing$$

برهان. اگر $\| e_I^r - x \| < 1$ آنگاه بنا به یکی از قضایا، $e_I^r - x$ شبه منظم است. قرار می‌دهیم $u = (e_I^r - x)^0$. در این صورت

$$u + e_I^r - x - ue_I^r + ux = u \circ (x_I^r - x) = 0$$

و لذا

$$e_I^r = (ue_I^r - u) + (x - ux)$$

حال اگر $\| e_I^r - x \| < 1$ و $x \in I$ آنگاه $e_I^r \in I$ و لذا $I = A$ که یک تناقض است. □

نتیجه ۷.۶.۱ بستار هر ایده‌آل مدولار (چپ یا راست یا دو طرفه) سره یک ایده آل مدولار سره (از همان نوع) است.

برهان. $\bar{I} = A \Rightarrow \bar{I} \cap \{x \in A : \| e_I^r - x \| < 1\} \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad I \cap \{x \in A : \| e_I^r - x \| < 1\} \neq \varnothing$

که تناقض است. □

نتیجه ۸.۶.۱ هر ایده‌ال مدولار ماکسیمال (چپ ، راست یا دوطرفه) بسته است.

تبصره: اگر A یک جبر باناخ با واحد eباشد آنگاه هر ایده‌آل آن مدولاردو طرفه (با واحد e) است. در نتیجه هر ایده‌آل ماکسیمال در یک جبر باناخ واحددار بسته است. نتیجه مشابه در مورد ایده‌آل‌های چپ یا راست ماکسیمال برقرار است.

۷.۱ گروه اعضای معکوس‌پذیر در یک جبر باناخ واحددار

گیریم A یک جبر باناخ با واحد e باشد. دیدیم که مجموعه G متشکل از کلیه اعضای معکوس پذیر A باز بوده و تحت عمل ضرب تشکیل یک گروه توپولوژیک می‌دهد. (یک گروه با توپولوژی هاسدورف که در آن نگاشت ضرب $G \times G \to G$ ، $(x, y) \to xy$ و نگاشت معکوس‌گیری $G \to G$ ، $x \to x^{-1}$ پیوسته‌اند.) داریم $G = \bigcup G_\alpha$ در آن هر G_α یک مولفه همبندی G است.جون G باز است هر G_α باز می‌باشد.

توضیح.

$$x \in G_\alpha \qquad \underset{G_\alpha \subseteq G}{\overset{\text{باز } G}{\Longrightarrow}} \qquad \exists \delta > 0 \; ; \; B(x, \delta) \subseteq G \quad \Rightarrow \quad G_\alpha \subseteq \overbrace{B(x, \delta) \cup G_\alpha}^{\text{همبند}} \subseteq G$$

$$\underset{\text{ماکسیمال } G_\alpha}{\Longrightarrow} \quad G_\alpha = B(x, \delta) \cup G_\alpha \qquad \Rightarrow \quad B(x, \delta) \subseteq G_\alpha$$

⋆

G_0 را مولفه شامل e گرفته و آن را مولفه اصلی G می‌نامیم.

قضیه ۱.۷.۱ مولفه اصلی G_0 یک زیرگروه نرمال G و همچنین یک زیرگروه مرتبط ماکسیمال G است.

برهان. قسمت دوم به وضوح از قسمت اول به دست می‌آید. پس فقط ثابت می‌کنیم که G_0 یک زیرگروه نرمال G است. اگر $a \in G_0$ آنگاه از آنجا که نگاشت $x \to ax$ یک همئومورفیسم از G بروی G است مولفه‌ها را

بر روی مولفه‌ها می‌نگارد. بالاخص aG_0 یک مولفه G است. چون $a = ae \in aG_0$ داریم $aG_0 = G_0$. از این جا $G_0 = a^{-1}aG_0 = a^{-1}G_0$. پس G_0 یک زیرگروه G است.

نرمال بودن: اگر $a \in G$ آنگاه از آنجا که $x \to axa^{-1}$ یک همئومورفیسم از G بروی G است لذا مولفه G_0 را بروی خودش می نگارد زیرا $e \to aea^{-1} = e$. بنابراین برای هر $a \in G$ داریم $aG_0a^{-1} = G_0$. □

تعریف ۲.۷.۱ گیریم A یک جبر باناخ با واحد e باشد. قرار می‌دهیم

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

سری سمت راست در A همگرای مطلق است و داریم $\| \exp(x) \| \leq \exp(\| x \|)$. اگر $xy = yx$ آنگاه

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

که به مانند اعداد مختلط می‌توان آن را ثابت کرد. بالاخص $\exp(-x)\exp(x) = e$ و بنابراین نگاشت $x \to \exp x$، A را به روی زیرمجموعه $E \subseteq G$ می‌نگارد. به ازای هر $x \in A$ هر جواب

$$\exp(y) = x$$

را یک لگاریتم x می‌نامند. بنابراین عناصر E دقیقا عناصری از A هستند که دارای لگاریتم می‌باشند.

تمرین: نشان دهید اگر $\| e - x \| < 1$ آنگاه سری $y = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(e-x)^n$ همگراست و $\exp y = x$. بنابراین $\{x \in A : \| x - e \| < 1\} \subseteq E$.

قضیه ۳.۷.۱ زیرگروه $G_1 \subseteq G$ تولید شده بوسیله مجموعه E با مولفه اصلی G_0 برابر است.

برهان. گیریم $u \in E$ و $u = \exp y$. قرار می‌دهیم

$$u(t) = \exp ty \qquad (t \in R)$$

داریم $u(t+\tau) = u(t)u(\tau)$، $u(0) = e$ و $u(1) = u$. بنابراین $\{u(t) : t \in R\}$ یک زیر گروه G است. چون

$$\| u(t) - u(\tau) \| \;=\; \| (\exp \tau y)(\exp((t-\tau)y) - e) \| \leq \| \exp \tau y \| . \| \exp((t-\tau)y) - e \|$$

و

$$\begin{aligned}\| \exp((t-\tau)y) - e \| &= \| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(t-\tau)^n y^n}{n!} \| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{| t-\tau |^n \| y \|^n}{n!} \\ &= \exp \|(t-\tau)y\| - 1 \to 0 \quad (t \to \tau),\end{aligned}$$

لذا

$$\| u(t) - u(\tau) \| \le \| \exp \tau y \| \big(\exp(|t-\tau| \|y\|) - 1 \big) \to 0 \qquad (t \to \tau).$$

بنابراین $u(t)$ تابعی پیوسته و بالنتیجه $\{u(t) : t \in R\} \subseteq G$ مجموعه‌ای همبند است. حال چون $e \in \{u(t) : t \in \mathbb{R}\} \bigcap G_0$ و G_0 همبند ماکسیمال است، لذا $\{u(t) : t \in R\} \subseteq G_0$. بالاخص $u = u(1) \in G_0$. بنابراین $E \subseteq G_0$ و لذا $G_1 \subseteq G_0$. اثبات کامل خواهد بود هرگاه نشان دهیم G_1 در G_0 هم باز و هم بسته است. گیریم $u_n \in G_1$ $(n = 1, 2, ...)$ و $u_n \to u_0 \in G_0$. نشان خواهیم داد $u_0 \in G_1$؛ یعنی G_1 در G_0 بسته است. در حقیقت $u_n^{-1}u_0 \to e$ و لذا با توجه به تمرین فوق برای nهای به قدر کافی بزرگ $u_n^{-1}u_0 \in E \subseteq G_1$ و لذا $u_0 = u_n(u_n^{-1}u_0) \in G_1$. اکنون نشان خواهیم داد که G_1 در G_0 باز است. گیریم $u_0 \in G_1$. اگر $\| u - u_0 \| . \| u_0^{-1} \| < 1$ (در حالت $A \neq 0$ به طور معادل $\| u - u_0 \| < \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$) آنگاه $\| uu_0^{-1} - e \| < 1$ و لذا بنا به تمرین بالا $uu_0^{-1} \in E \subseteq G_1$ و لذا $u = uu_0^{-1}u_0 \in G_1$. بنابراین G_1 در G_0 باز بوده و حکم ثابت است .

□

نتیجه ۴.۷.۱ اگر A جابجایی باشد آنگاه $E = G_0$.

برهان. در این حالت E خود یک گروه است و لذا $E = G_1 = G_0$ □

قضیه ۵.۷.۱ (ناگومو [1]) عضو $x \in A$ یک لگاریتم است اگر و فقط اگر عضوی از یک زیرگروه آبلی و همبند G باشد. به عبارت دیگر $E = \bigcup \tilde{G_\alpha}$ که در آن $(\tilde{G_\alpha})$ خانواده کلیه زیرگروه‌های آبلی و همبند G است.

برهان. اگر $u \in E$ آنگاه u عضوی اززیر گروه آبلی و همبند $\{u(t) : t \in R\} \subseteq G$ است که در اثبات قضیه قبل آمده است. بالعکس نشان خواهیم داد که هر زیرگروه آبلی همبند $\tilde{G_\alpha}$ از G مشمول E است. فرض کنیم A_α زیر جبر جابجایی ماکسیمال A باشد که شامل $\tilde{G_\alpha}$ است (مجموعه کلیه ترکیب های خطی از حاصل ضرب های متناهی عناصر $\tilde{G_\alpha}$ یک زیر جبر جابجایی شامل $\tilde{G_\alpha}$ است و لذا بنابه لم زرن زیر جبر جابجایی ماکسیمال

[1] Nagumo

شامل $\tilde{G_\alpha}$ موجود است). گیریم G_α^0 مولفه اصلی G_α، گروه عناصر معکوس پذیر A_α باشد و فرض کنیم E_α نظیر E برای جبر A_α باشد. بنا به نتیجه بالا داریم $E_\alpha = G_\alpha^0$. اما $\tilde{G_\alpha} \subseteq G_\alpha^0$. بنابراین تمام عناصر $\tilde{G_\alpha}$ دارای لگاریتم در A_α و به طور خودکار در A هستند. پس $\tilde{G_\alpha} \subseteq E$. □

قضیه ۱.۷.۶ (لورچ [۲]) اگر A یک جبر باناخ مختلط جابجایی و واحددار باشد آنگاه گروه عناصر معکوس پذیر آن همبند ویا دارای تعداد نامتناهی مولفه می باشد.

برهان. گیریم $x \in G$. حکم ثابت می‌شود هر گاه نشان دهیم اگر $x \notin G_0$ آنگاه کلیه قوای x^n (n یک عدد صحیح است) در مولفه‌های متمایز (مجزا) G هستند. فرض کنیم x^k, x^l که $k \neq l$ در یک مولفه G_α واقع باشند (فرض خلف). در این صورت $G_0 = G_\alpha x^{-l}$ و لذا x^{k-l} در مولفه اصلی G_0 واقع است و لذا برای یک $n > 0$ ، $x^n \in G_0$. بنا به نتیجه بالا x^n دارای لگاریتم است و لذا $y \in A$ هست که $x^n = \exp(y)$. گیریم $u = \exp(-y/n)$. داریم $u \in G_0$. اما $u^n = \exp(-y)$ و لذا $(ux)^n = u^n x^n = \exp(y-y) = e$، که این نشان می‌دهد ux عنصری از مرتبه متناهی است. نشان خواهیم داد هر عنصر ازG با مرتبه متناهی در G_0 قرار دارد. زیرا اگر $a^n = e$ و $a \in G$ آنگاه با قرار دادن $a(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda-1)^k (\lambda a)^{n-1-k} \quad (\lambda \in \mathbb{C})$، داریم

$$(\lambda^n - (\lambda-1)^n)e = [(\lambda a)^n - (\lambda-1)^n e] = [\lambda a - (\lambda-1)e]a(\lambda)$$

و لذا اگر $\lambda^n \neq (\lambda-1)^n$ آنگاه $\lambda a - (\lambda-1)e \in G$. تابع $\lambda \to \phi_a(\lambda) = \lambda a - (\lambda-1)e$ نگاشت پیوسته‌ای از صفحه مختلط $\mathbb{C}$ به توی A است که $0 \to e$ و$1 \to a$ بعلاوه می‌توان قوس $\{\lambda(t) : 0 \leq t \leq 1\}$ در $\mathbb{C}$ را چنان یافت که نقاط $1, 0$ را به هم وصل کرده و همواره $[\lambda(t)]^n \neq [\lambda(t)-1]^n$. اکنون نگاشت $t \to \phi_a(\lambda(t))$ بازه بسته $[0,1]$ را به طور پیوسته بتوی G می‌نگارد و لذا با توجه به قضیه(۱.۷.۱) داریم $\phi_a(\lambda(t) \in G_0$ برای هر $t \in [0,1]$. بالاخص $a = \phi_a(1) = \phi_a(\lambda(1)) \in G_0$. بنابراین $ux \in G_0$ و چون $u^{-1} \in G_0$، داریم $x = u^{-1}ux \in G_0$ که متناقض با فرض $x \neq G_0$ می‌باشد. بدین ترتیب فرض این که دو توان مختلف x به یک مولفه متعلق هستند به یک تناقض رسیده و حکم ثابت است. □

۸.۱ جبر خارج قسمتی

[۲] Lorch

قضیه ۱.۸.۱ گیریم A یک جبر باناخ و I ایده‌آلی دو طرفه‌و بسته از A باشد. در این صورت $\frac{A}{I} = \{\pi(x) = x + I : x \in A\}$ با اعمال

$$\pi(x) + \pi(y) = \pi(x+y) \quad , \quad \alpha\pi(x) = \pi(\alpha x) \quad , \quad \pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$$

$(x, y \in A, \alpha \in C)$ و نرم $\| \pi(x) \| = d(x, I) = inf_{y\in I} \| x + y \|$ یک جبر باناخ بوده و $\pi : A \to \frac{A}{I}$ با ضابطه‌ی $x \to x + I$ یک همومورفیسم پیوسته و بازبروی $\frac{A}{I}$ با فضای پوچ I است. به علاوه اگر اگر A جابجایی یا واحددار باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ نیز چنین است.

برهان. خوش تعریفی: گیریم $x, y, x', y' \in A$، $\alpha \in \mathbb{C}$ و $\pi(x) = \pi(x'), \pi(y) = \pi(y')$. در این صورت $x - x' \in I$ و $y - y' \in I$ و لذا بنا به ایده‌آل بودن I

$$(x+y) - (x'+y') \in I \quad , \quad \alpha x - \alpha x' \in I \quad , \quad xy - x'y' = x(y-y') + (x-x')y' \in I$$

پس $\pi(x+y) = \pi(x'+y')$، $\pi(\alpha x) = \pi(\alpha x')$ و $\pi(xy) = \pi(x'y')$. اکنون به راحتی دیده می‌شود که با این اعمال $\frac{A}{I}$ یک جبر با عضو خنثی $\pi(0) = I$ بوده و اگر بعلاوه A جابجایی یا دارای واحد e باشد آنگاه $\frac{A}{I}$ نیز به ترتیب جابجایی یا دارای واحد $\pi(e) = e + I$ می‌باشد. گیریم $x, y, \in A$، $\alpha \in \mathbb{C}$ و $\delta > 0$ دلخواه باشند. $x_1, y_1 \in I$ هستند که

$$\| x + x_1 \| < \| \pi(x) \| + \delta \quad , \quad \| y + y_1 \| < \| \pi(y) \| + \delta$$

بنابراین از آنجا که

$$(x + x_1)(y + y_1) = xy + (xy_1 + x_1y + x_1y_1) \in xy + I \quad , \quad (x + x_1) + (y + y_1) \in (x + y) + I$$

داریم

$$\begin{aligned}
\| \pi(x) + \pi(y) \| &= \| \pi(x+y) \| \leq \| (x + x_1) + (y + y_1) \| \leq \| x + x_1 \| + \| y + y_1 \| \\
&\leq \| \pi(x) \| + \| \pi(y) \| + 2\delta \\
\| \pi(x)\pi(y) \| &= \| \pi(xy) \| \\
&\leq \|(x + x_1)(y + y_1)\| \leq \|x + x_1\|\|y + y_1\| \leq (| \pi(x)\| + \delta)(\|\pi(y)\| + \delta)
\end{aligned}$$

حال اگر $\delta \to 0$ خواهیم داشت

$$\| \pi(x)\pi(y) \| \leq \| \pi(x) \| \, . \, \| \pi(y) \| \quad , \quad \| \pi(x)+\pi(y) \| \leq \| \pi(x) \| + \| \pi(y) \|$$

واضح است که $\|\pi(x)\| \geq 0$ و

$$\| \pi(x) \| = 0 \iff d(x,I)=0 \iff x \in \overline{I} = I \iff \pi(x) = x+I = I$$

$$\| \alpha\pi(x) \| = \| \pi(\alpha x) \| = \inf_{y\in I} \| \alpha x + y \| = | \alpha | \inf_{y\in I} \| x + \frac{y}{\alpha} \|$$

$$= |\alpha| \inf_{y\in I} \| x+y \| = | \alpha | \, . \, \| \pi(x) \|$$

پس $\frac{A}{I}$ با نرم فوق یک جبر نرمدار است. بوضوح π یک هومومورفیسم (جبری) است و چون همواره $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$، π پیوسته $(\|\pi\| \leq 1)$ می‌باشد.

اکنون نشان می‌دهیم $\frac{A}{I}$ تام و لذا یک جبر باناخ است. گیریم $\{\pi(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کوشی در $\frac{A}{I}$ باشد. زیردنباله‌ای مانند $\{\pi(x_{n_i})\}_{n=1}^{\infty}$ موجود است که

$$\|\pi(x_{n_{i+1}}) - \pi(x_{n_i})\| \leq \frac{1}{2^i} \qquad (i=1,2,3,...)$$

دنباله $\{x'_i\}$ از عناصر A است که $\| x'_{i+1} - x'_i \| < \frac{1}{2^i}$ و $(i=1,2,3,...)$ $\pi(x'_i) = \pi(x_{n_i})$. زیرا قرار دهید $x'_1 = x_{n_1}$ و اگر x'_i چنان باشد که $\pi(x'_i) = \pi(x_{n_i})$، با توجه به خاصیت مشخصه اینفیموم به ازای $\varepsilon = \frac{1}{2^i} - \| \pi(x_{n_{i+1}}) - \pi(x_{n_i}) \| > 0$. یک $z_i \in I$ هست که

$$\| x_{n_{i+1}} - x'_i + z_i \| < \| \pi(x_{n_{i+1}} - x'_i) \| + \varepsilon = \| \pi(x_{n_{i+1}}) - \pi(x_{n_i}) \| + \varepsilon = \frac{1}{2^i}$$

اکنون قرار می‌دهیم $x'_{i+1} = x_{n_{i+1}} + z_i$. داریم $\pi(x'_{i+1}) = \pi(x_{n_{i+1}})$ و $\| x'_{i+1} - x'_i \| < \frac{1}{2^i}$. بدین ترتیب دنباله $\{x'_{n_i}\}$ با خاصیت فوق به دست می‌آید. چون A تام است لذا دنباله کوشی $\{x'_i\}$ به نقطه‌ای مانند $x \in A$ همگرا است. چون π پیوسته است لذا

$$\pi(x_{n_i}) = \pi(x'_i) \to \pi(x)$$

اما یک دنباله کوشی که دارای زیردنباله‌ای همگرا باشد خود همگرا است . بنابراین $\frac{A}{I}$ تام یا باناخ است. چون π یک نگاشت خطی پیوسته از فضای باناخ A بروی فضای باناخ $\frac{A}{I}$ است بنا به قضیه نگاشت باز، باز می‌باشد.

$\square$

تمرین: نشان دهید که هر همومورفیسم $\phi : A \to \mathbb{C}$ از یک جبر باناخ واحددار پیوسته است.

برهان. اگر$\phi = 0$ آنگاه بوضوح ϕ پیوسته است. گیریم $\phi \neq 0$ پس $\phi(e) \neq 0$ (زیرا اگر $\phi(e) = 0$ آنگاه به ازای هر x، $\phi(x) = \phi(xe) = \phi(x)\phi(e) = 0$ که این یک تناقض است) .بنابراین از آنجا که $\phi(e) = \phi(e.e) = \phi(e)^2$ داریم $\phi(e) = 1$.گیریم x با $\| x \| < 1$ دلخواه باشد. به ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$ که $\| \lambda \| \geq 1$ داریم $\| \lambda^{-1} x \| < 1$، و لذا $e - \lambda^{-1}x$ معکوس‌پذیر است. بنابراین $1 - \lambda^{-1}\phi(x) = \phi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$، و لذا $\lambda \neq \phi(x)$. پس $|\phi(x)| < 1$ و در نتیجه $\| \phi \| = sup_{\|x\|<1} \mid \phi(x) \mid \leq 1$. $\square$

تمرین: نشان دهید هر جبر باناخ حقیقی A را می‌توان بطور ایزومورفیسم توپولوژیکی در یک جبر باناخ مختلط نشاند که این عمل را مختلط سازی A می‌نامند.

فصل دوم

جبرهای باناخ جابجایی

۱.۲ مقدمات

در این فصل کلیه جبرها جابجایی و مختلط فرض می‌شوند.

تعریف ۱.۱.۲ گیریم A یک جبر باناخ باشد. هر همومورفیسم ناصفر $f : A \to \mathbb{C}$ را یک تابعک خطی ضربی بر A می‌نامیم. به عبارت دیگر $f : A \to \mathbb{C}$ خطی-ضربی است هرگاه:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad , \quad f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in A, \alpha, \beta \in \mathbb{C})$$

و به ازای یک x ، $f(x) \neq 0$. مجموعه همه تابعکهای خطی—ضربی بر A را به $\mathfrak{M}(A)$ نشان می‌دهیم.

قضیه ۲.۱.۲ گیریم A یک جبر باناخ مختلط جابجایی باشد. در این صورت نگاشت $f \to Kerf$ یک تناظر یک به یک بین $\mathfrak{M}(A)$ و مجموعه همه ایده‌آلهای مدولار ماکسیمال A است.
در حالت خاص اگر A واحددار باشد این نگاشت یک تناظر یک به یک بین $\mathfrak{M}(A)$ و مجموعه همه ایده‌آلهای ماکسیمال A است.

برهان. گیریم $f \in \mathfrak{M}(A)$. واضح است که $M = Kerf = \{x \in A : f(x) = 0\}$ یک ایده‌آل A است. چون $f \neq 0$ عضو $e_M \in A$ هست که $f(e_M) = 1$. به ازای هر $x \in A$ داریم $f(x - e_M x) = f(x) - f(e_M)f(x) = 0$

و لذا $x - e_M x \in M$. پس e_M یک واحد به هنگ M بوده و M یک ایده‌آل مدولار است. واضح است که $\frac{A}{M} =< e_M + M >$

$$(x \in A \Rightarrow f(x - f(x)e_M)) = 0 \Rightarrow x - f(x)e_M \in M \Rightarrow x + M = f(x)(e_M + M))$$

و همبعد M برابر با یک می‌باشد. پس M ماکسیمال است و نگاشت $f \to Kerf$ خوش تعریف است.

$$(M \subseteq I \subseteq A \Longrightarrow \frac{M}{M} \subseteq \frac{I}{M} \subseteq \frac{A}{M} \Longrightarrow \dim \frac{I}{M} = 0 \text{ یا } 1 \Longrightarrow I = M \text{ یا } I = A)$$

اکنون گیریم M یک ایده‌آل مدولار ماکسیمال و e_M یک واحد به هنگ M باشد. بنا به نتیجهٔ (۸.۶.۱) M بسته است. اکنون $\frac{A}{M} \neq 0$ یک جبر باناخ واحددار (با واحد $e_M + M$) بوده که هر عضو ناصفر آن معکوس‌پذیر است.

توضیح.

$$\text{یک ایده‌آل } \quad x + M \neq M \to x \notin M \Rightarrow M \subsetneqq I = \{ax + m : a \in A, m \in M\}$$

$$\overset{M \text{ ماکسیمال}}{\Longrightarrow} I = A \Rightarrow \exists a \in A, \exists m \in M; ax + m = e_M \Rightarrow (a + M)(x + M) = e_M + M$$

$\star$

پس بنا به قضیه گلفاند– مزور یک ایزومورفیسم ایزومتری $j : \frac{A}{M} \to \mathbb{C}$ موجود است. اکنون $f = jo\pi \in \mathfrak{M}(A)$ که در آن $\pi : A \to \frac{A}{M}$ هومومورفیسم طبیعی است و $Kerf = Ker\pi = M$. پس نگاشت $f \to Kerf$ برو است. اکنون گیریم $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(A)$ و $Kerf_1 = Kerf_2 = M$. فرض کنیم $e_1, e_2 \in A$ چنان باشند که $f(e_1) = 1$ و $f(e_2) = 1$. اکنون $e_1 + M$ و $e_2 + M$ واحد $\frac{A}{M}$ بوده و لذا $e_1 + M = e_2 + M (\neq 0)$. حال چون به ازای هر $x \in A$ داریم $x = f_1(x)(e_1 + M) = f_2(x)(e_2 + M)$ لذا $f_1(x) = f_2(x)$. بنابراین $f \to Kerf$ یک به یک است.

اگر A دارای واحد باشد آنگاه هر ایده‌آل مدولار بوده و لذا $f \to Kerf$ یک تناظر یک به یک بین $\mathfrak{M}(A)$ و مجموعه کلیه ایده‌آلهای ماکسیمال A می‌باشد. $\square$

تبصره: با توجه به تناظر فوق مجموعه کلیه تابعکهای خطی–ضربی و مجموعه کلیه ایده‌آلهای مدولار ماکسیمال یکی گرفته شده و $\mathfrak{M}(A)$ برای نمایش هر دوی آنها به کار می‌رود. همچنین از علامت M هم به عنوان یک ایده‌آل مدولار ماکسیمال و هم به عنوان یک تابعک خطی– ضربی استفاده می‌شود.

نتیجه ۳.۱.۲ در هر جبر باناخ مختلط تعویض‌پذیر هر تابعک خطی $-$ ضربی پیوسته است.

برهان. زیرا فضای پوچ هر تابعک خطی-ضربی یک ایده‌آل مدولار ماکسیمال و بالنتیجه بسته است. $\square$

نتیجه ۴.۱.۲ اگر A یک جبر باناخ مختلط و تعویض‌پذیر و $f \in \mathfrak{M}(A)$ باشد آنگاه $\| f \| \leq 1$.

برهان. نشان می‌دهیم برای هر $x \in A$، $| f(x) | \leq \| x \|$. فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف). پس $x_0 \in A$ هست که $|f(x_0)| > \|x_0\|$. اسکالر $\alpha \in \mathbb{C}$ هست که $|f(\alpha x_0)| > 1 > \|\alpha x_0\|$ (در حقیقت $(\exists \alpha > 0, | f(x_0) | > \frac{1}{\alpha} > \| x_0 \|)$. بنابراین $| f(\alpha x_0)^n | = | f(\alpha x_0) |^n \to \infty$ ولی $\|(\alpha x_0)^n\| \leq \|\alpha x_0\|^n \to 0$ وقتی که $n \to \infty$، که این متناقض با پیوسته بودن f است. پس $|f(x)| \leq \|x\|$ به ازای هر $x \in A$ و لذا $\| f \| \leq 1$. $\square$

نتیجه ۵.۱.۲ در هر جبر باناخ مختلط تعویض‌پذیر ناصفر و واحددار حداقل یک تابعک خطی-ضربی وجود دارد.

برهان. اگر هر عضو ناصفر A معکوس‌پذیر باشد آنگاه بنا به قضیه گلفاند-مزور $A = \mathbb{C}$ و لذا $f(\lambda e) = \lambda (\lambda \in \mathbb{C})$ یک تابعک خطی$-$ ضربی بر A است. گیریم A دارای عضو معکوس ناپذیر x باشد. در این صورت xA یک ایده‌آل سره از A است و لذا در یک ایده‌آل ماکسیمال واقع است. بنابراین جبر A دارای حداقل یک ایده‌آل ماکسیمال و یا به طور معادل یک تابعک خطی-ضربی است. $\square$

تمرین:

(a) مثالی از یک جبر باناخ مختلط،جابجایی، ناصفر وبدون واحد بزنید که بدون تابعک خطی-ضربی باشد.

(b) مثالی از یک جبر باناخ مختلط، غیر جابجائی و دارای واحد ناصفر بزنید که بدون تابعک خطی-ضربی باشد.

(c) مثالی از یک جبر باناخ حقیقی، جابجائی، و ناصفر واحددار بزنید که بدون تابعک خطی-ضربی باشد.

قضیه ۶.۱.۲ گیریم A یک جبر باناخ (مختلط و جابجایی) یکدار باشد. در این صورت

(a) عضو $x \in A$ معکوس‌پذیر است اگر و فقط اگر برای هر $f \in \mathfrak{M}(A)$، $f(x) \neq 0$؛

(b) عضو $x \in A$ معکوس‌پذیر است اگر وفقط اگر x در هیچ ایده‌آل سره از A واقع نباشد؛

(c) $\sigma(x) = \{f(x) : f \in \mathfrak{M}(A)\}$.

برهان. (a) اگر x در A معکوس‌پذیر باشد و $f \in \mathfrak{M}(A)$ آنگاه

$$f(x)f(x^{-1}) = f(xx^{-1}) = f(e) = 1$$

و لذا $f(x) \neq 0$. گیریم x معکوس پذیر نباشد . بنابراین $I = \{ax : a \in A\}$ شامل e نبوده ولذا یک ایده‌آل سره از A است که در یک ایده‌آل ماکسیمال M قرار دارد . اما ایده‌آل ماکسیمال M فضای پوچ یک $f \in \mathfrak{M}(A)$ است. پس از آنجا که $x = e.x \in I \subseteq M$، داریم $f(x) = 0$.

(b) هیچ عضو معکوس پذیر در ایده‌آلی سره قرار ندارد . عکس این مطلب در (a) ثابت شده است.

(c)
$$\lambda \in \sigma(x) \Longleftrightarrow \lambda e - x \notin inv(A) \overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \exists f \in \mathfrak{M}(A); f(\lambda e - x) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists f \in \mathfrak{M}(A); \lambda = f(x) \Longleftrightarrow \lambda \in \{f(x) : f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

$\square$

لم ۷.۱.۲ (وینر [۱]): گیریم f تابعی مختلط بر R^n بوده که $f(x) =$ که

$$f(x) = \sum_{m \in Z^n} a_m e^{im.x}, \qquad \sum_{m \in Z^n} | a_m |< \infty \tag{۱}$$

حال اگر به ازای هر $x \in R^n$، $f(x) \neq 0$، آنگاه

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{m \in Z^n} b_m e^{im.x}, \qquad \sum_{m \in Z^n} | b_m |< \infty \tag{۲}$$

برهان. نمایش هر تابع به شکل (۱) منحصر به فرد است؛ زیرا گیریم $\sum_{m \in Z^n} | a_m |< \infty$. داریم

$$f(x) = \sum_{m \in Z^n} a_m e^{im.x} \Rightarrow f(x)e^{-im'.x} = \sum_{m \in Z^n} a_m e^{i(m-m').x}$$

حال چون سری سمت راست بنا به آزمون M–وایراشتراس همگرای یکنواخت است، بنابراین

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} f(x)e^{-im'.x}dx = \sum_m \frac{a_m}{(2\pi)^n} \int_{[0,2\pi]^n} e^{i(m-m').x}dx$$
$$= \sum_m \frac{a_m}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} e^{i(m_1-m_1')x_1} e^{i(m_2-m_2')x_2} \ldots e^{i(m_n-m_n')x_n} dx_1 \cdots dx_n = a_{m'}$$

[۱] wiener

گیریم A مجموعه کلیه توابع مختلط به شکل (۱) با نرم $\| f \| = \sum_m | a_m |$ باشد. به راحتی دیده می‌شود که A یک جبر باناخ جابجائی با جمع و ضرب نقطه وار است و واحد آن تابع ثابت ۱ است (چرا؟)

توضیح. گیریم $\mathbb{Z}^n$ با اندازه شمارش μ باشد. فرض کنیم

$$f(x) = \sum_m a_m e^{im.x}, \quad g(x) = \sum_m b_m e^{im.x}, \quad \sum_m | a_m | < \infty, \quad \sum_m | b_m | < \infty$$

نقطه x را ثابت در نظر می‌گیریم . تابع $u : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ را با ضابطه $u(m, m') = a_{m-m'} b_{m'} e^{im.x}$ در نظر می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{Z}^n} |u(m, m')| d\mu(m) d\mu(m') &= \sum_{m'} |b_{m'}| \sum_m |a_{m-m'}| \\
&= \sum_{m'} |b_{m'}| \sum_m |a_m| = \|f\|.\|g\| < \infty
\end{aligned}$$

پس بنا به قضیه فوبینی $u \in L^1(\mu \times \mu)$ و

$$\begin{aligned}
\sum_m \Big(\sum_{m'} a_{m-m'} b_{m'} \Big) e^{im.x} &= \int_{\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{Z}^n} u(m, m') d\mu(m') d\mu(m) \\
&= \int_{\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{Z}^n} u(m, m') d\mu(m) d\mu(m') = \sum_{m'} b_{m'} . \sum_m a_{m-m'} e^{im.x} \\
&= \sum_{m'} b_{m'} e^{im'.x} . \sum_m a_{m-m'} e^{i(m-m').x} = f(x) g(x)
\end{aligned}$$

پس $f.g \in A$ و

$$\begin{aligned}
\|fg\| = \sum_m | \sum_{m'} a_{m-m'} b_{m'} | &\leq \sum_m \sum_{m'} |a_{m-m'}| |b_{m'}| \\
&= \sum_{m'} \sum_m |a_{m-m'}| |b_{m'}| = \sum_{m'} |b_{m'}| \sum_m |a_{m-m'}| = \|f\| \|g\|
\end{aligned}$$

واحد این جبر تابع ثابت ۱ می‌باشد. $\star$

به ازای هر x، $h \longrightarrow h(x)$ یک تابعک خطی$-$ ضربی مقداری بر A است. با توجه به فرض هیچ یک از این تابعک های خطی ضربی f را صفر نمی‌کنند. اگر ثابت کنیم که A تابعک خطی-ضربی به غیر از تابعکهای خطی$-$ ضربی مقداری ندارد آنگاه با توجه به (a) از قضیه قبل f در A معکوس پذیر بوده واین همان نتیجه مطلوب است . برای $r = 1, ..., n$ قرار می دهیم $g_r(r) = exp(ix_r) = e^{ie_r.x}$ که در آن x_r مولفه $-r$ ام x است. به وضوح $g_r, \frac{1}{g_r}$ در A و دارای نرم یک می‌باشند. گیریم $h \in \mathfrak{M}(A)$. داریم

$$| h(g_r) | \leq \| h \| . \| g_r \| \leq 1, \qquad | \frac{1}{h(g_r)} | = | h(\frac{1}{g_r}) | \leq \| h \| \| \frac{1}{g_r} \| \leq 1$$

بنابراین عدد حقیقی y_r هست که

$$h(g_r) = exp(iy_r) = g_r(y) \qquad (1 \leq r \leq n) \tag{۳}$$

که در آن $y = (y_1, ..., y_n)$. اگر P یک چند جمله ای مثلثاتی (یک ترکیب خطی متناهی از حاصلضربهای توانهای صحیح توابع g_r) باشد آنگاه (۳) نشان می‌دهد که

$$h(P) = P(y) \tag{۴}$$

زیرا h خطی و ضربی است. چون h بر A پیوسته است و با توجه به تعریف نرم مجموعه کلیه چندجمله ایهای مثلثاتی در A چگال است، (۴) نتیجه می‌دهد که برای هر $f \in A$، $h(f) = f(y)$. پس h یک تابعک خطی– ضربی مقداری بوده و حکم ثابت است. $\square$

۲.۲ صورت عمومی تابکهای خطی– ضربی در بعضی از جبرهای باناخ

(۱) نشان می‌دهیم که در جبر باناخ $C(\Omega)$ که در آن Ω یک فضای هاسدورف فشرده است هر تابعک خطی– ضربی به شکل مقداری زیر است

$$f \longrightarrow f(x)$$

که در آن x یک نقطه ثابت در Ω است. فرض کنیم $\phi \in \mathfrak{M}(A)$. نشان می‌دهیم

$$\exists x_0 \in \Omega \quad \forall f \in C(\Omega) \qquad (\phi(f) = 0 \Longrightarrow f(x_0) = 0) \tag{۱}$$

گیریم چنین نباشد. پس به ازای هر $x \in \Omega$ تابع $f_x \in C(\Omega)$ موجود است که $\phi(f_x) = 0$ ولی $f_x(x) \neq 0$. مجموعه های باز $U_x = \{\ t \in \Omega : f_x(t) \neq 0\}$ $(x \in)$ فضای فشرده Ω را می‌پوشانند. بنابراین تعداد متناهی نقطه $x_1, \cdots, x_n \in \Omega$ هست که $\Omega = U_{x_1} \cap \cdots \cap U_{x_n}$. قرار می دهیم

$$g = \mid f_{x_1} \mid^2 + ... + \mid f_{x_n} \mid^2 = f_{x_1}\bar{f}_{x_1} + ... + f_{x_n}\bar{f}_{x_n}$$

داریم $g \in C(\Omega)$ و $(t \in \Omega) \quad g(t) > 0$. بنابراین g در $C(\Omega)$ معکوس پذیر است. اما

$$\phi(g) = \sum_{i=1}^{n} \phi(f_{x_i})\phi(\bar{f}_{x_i}) = 0$$

که این یک تناقض است. بنابراین فرض خلف باطل بوده و (۱) برقرار است. گیریم $f \in C(\Omega)$ دلخواه باشد. داریم $\phi(f - \phi(f).1) = 0$ و بنابراین $(f - \phi(f).1)(x_0) = 0$ یا $f(x_0) - \phi(f) = \phi(f) = f(x_0)$. یعنی ϕ به صورت مقداری $f \longrightarrow f(x_0)$ بوده و حکم ثابت است.

(۲) نشان می دهیم که در جبر$L_1(-\infty, +\infty)$ هر تابعک خطی– ضربی ϕ به صورت

$$\phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dt$$

می‌باشد. نگاشت $u : L^1(R^1) \longrightarrow L_1(-\infty, +\infty)$ با ضابطه $u(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}f$ یک ایزومورفیسم ایزومتری از جبر باناخ $L^1(R^1)$ با ضرب $(f *' g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dm(y)$ و نرم $\| f \|' = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | dm(x)$ به روی جبر باناخ $L_1(-\infty, +\infty)$ با ضرب $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy$ و نرم $\| f \| = \int_{-\infty}^{+\infty} | f(x) | dx$ می‌باشد که در آن m اندازه لبگ تقسیم شده بر $\sqrt{2\pi}$ می‌باشد.

توضیح.

$$\| f \| = \sqrt{2\pi} \| f \|', \qquad f * g = \sqrt{2\pi} f *' g$$

$$\| f * g \| = \| \sqrt{2\pi} f *' g \| = 2\pi \| f *' g \|' \leq (\sqrt{2\pi} \| f \|')(\sqrt{2\pi} \| g \|') = \| f \| . \| g \|$$

$$u(f *' g) = \frac{f *' g}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi}(f * g) = \frac{f}{\sqrt{2\pi}} * \frac{g}{\sqrt{2\pi}} = u(f) * u(g)$$

$\star$

گیریم ϕ یک تابعک خطی– ضربی بر$L_1(-\infty, +\infty)$ باشد. در این صورت $\phi \circ u$ یک تابعک خطی– ضربی بر $L^1(R^1)$ می‌باشد. بنابراین بنا به یک قضیه در آنالیز حقیقی، $t \in R$ هست که

$$\phi \circ u(f) = \hat{f}(-t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixt}dm(x)$$

بنابراین

$$\phi(\frac{f}{\sqrt{2\pi}}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{ixt}dx$$

از اینجا حکم به دست می آید.

(۳) نشان می‌دهیم که در $\ell_1(-\infty, +\infty)$ هر تابعک خطی– ضربی به صورت

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int} \qquad (x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ell_1) \qquad (۱)$$

است که در آن $0 \leq t < 2\pi$. برای این منظور عضو $x_0 = (\delta_{1n})_{-\infty}^{\infty}$ را در نظر می‌گیریم. گیریم f یک تابعک خطی– ضربی بر $\ell_1(-\infty, \infty)$ باشد و $f(x_0) = \alpha$. عضو x_0 معکوس پذیر است

(معکوس آن عبارت است از $x_0^{-1}=(\delta_{-1,n})$ زیرا جمله nام حاصلضرب $(\delta_{1n})*(\delta_{-1,n})$ عبارت است از $\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta_{1,n-k}.\delta_{-1,k}=\delta_{1,n+1}=\delta_{0,n}$). چون هر عضو $x=(x_n)$ از $\ell_1(-\infty,\infty)$ به صورت سری همگرای $x=\sum_{-\infty}^{\infty}x_nx_0^n$ نوشته می‌شود

$$\left(\| x-\sum_{n=-N}^{n=N}x_nx_0^n \|=\| (...,x_{-N-2},x_{-N-1},,0,0\cdots,0,\cdots 0,x_{N+1},x_{N+2},...) \|=\sum_{|n|>N}| x_n |\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}0\right)$$

با توجه به پیوستگی f داریم

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_n\alpha^n \qquad (۲)$$

نشان می‌دهیم $|\alpha|=1$. اگر $|\alpha|>1$ باشد آنگاه با قرار دادن $y=(y_n)$ که در آن $y_n=\alpha^{-n}$ برای $n\geq 0$ و $y_n=0$ برای $n<0$، داریم $y\in l_1(-\infty,+\infty)$ و $f(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\alpha^n}=\infty$ که این یک تناقض است. اگر $0<|\alpha|<1$ آنگاه با قراردادن $z=(z_n)$ که در آن $z_n=\alpha^{-n}$ برای $n\leq 0$ و $z_n=0$ برای $n>0$، داریم $z\in\ell_1(-\infty,+\infty)$ ولی $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{0}\frac{\alpha^n}{\alpha^n}=\infty$ که این نیز یک تناقض است. پس $|\alpha|=1$ و لذا $\alpha=eit$ که در آن $0\leq t<2\pi$ و اکنون (۲) رابطه (۱) را نتیجه می دهد.

(۴) فرض کنیم $A(U)$ جبر کلیه توابع هولومورفیک در قرص باز $U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ و پیوسته بر $\overline{U}$ باشد. $A(U)$ یک جبر باناخ جابجائی با واحد تابع ۱ و نرم

$$\| f \|=\sup_{|z|\leq 1}| f(z) |=\max_{|z|\leq 1}| f(z) |=\max_{|z|=1}| f(z) |$$

می باشد. برای اثبات باناخ بودن $A(U)$، گیریم $\{f_n\}$ دنباله ای کوشی در $A(U)$ باشد. چون

$$| f_n(z)-f_m(z) |\leq\| f_n-f_m \|\longrightarrow 0 \qquad (m,n\to\infty,z\in\overline{U})$$

لذا دنباله تابعی $f_n(z)$ بر $\overline{U}$ به طور یکنواخت کوشی بوده و در نتیجه به تابع پیوسته f بر $\overline{U}$ به طور یکنواخت همگرا است. نشان می‌دهیم f بر U تحلیلی است. برای این منظور مثلث بسته و دلخواه $\triangle\subseteq U$ را در نظر می‌گیریم. چون f_n ها بر U هولومورفیک (تحلیلی) هستند داریم $\int_{\partial\triangle}f_n(z)dz=0$.
بنابراین

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\triangle}f(z)dz\right| &= \left|\int_{\partial\triangle}f(z)dz-\int_{\partial\triangle}f_n(z)dz\right|=\left|\int_{\partial\triangle}(f(z)-f_n(z))dz\right|\\ &\leq \| f_n-f \| .L(\partial\triangle)\longrightarrow 0 \qquad (n\to\infty)\end{aligned}$$

و لذا $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$. پس بنا به قضیه موررا f بر U تحلیلی است. پس $f \in A(U)$ و لذا $A(U)$ باناخ است.
اکنون نشان می‌دهیم که کلیه تابعک های خطی− ضربی بر $A(U)$ به شکل مقداری $f \longrightarrow f(z)$ می‌باشند که در آن $| z |\leq 1$. در حقیقت اگر ϕ یک تابعک خطی− ضربی بر $A(U)$ باشد قرار می‌دهیم $z = \phi(id)$ که در آن $id \in A(U)$ تابع همانی است. داریم $|z| \leq \|\phi\|.\|id\| \leq 1$. به ازای هر چندجمله‌ای P داریم $\phi(P) = P(z)$.

توضیح.

$$P(w) = a_0 + a_1w + ... + a_nw^n \Rightarrow P = a_0.1 + a_1(id) + a_2(id)^2 + \cdots + a_n(id)^n$$

$$\Rightarrow \phi(P) = a_0\phi(1) + a_1\phi(id) + ... + a_n[\phi(id)]^n$$

$$= a_0 + a_1z + ... + a_nz^n = P(z)$$

$\star$

حال چون چند جمله‌ایها در $A(U)$ چگال اند و ϕ پیوسته است، داریم

$$\phi(f) = f(z) \qquad (f \in A(U)\ )$$

یعنی ϕ به صورت هومورفیسم مقداری $f \longrightarrow f(z)$ می‌باشد.

(۵) گیریم $L_1(0,1)$ فضای باناخ کلیه توابع مختلط انتگرال پذیر بر $[0,1]$ با نرم

$$\| f \| = \int_0^1 | f(x) | dx$$

باشد . اگر ضرب را به صورت زیر تعریف کنیم

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(x-y)g(y)dy \qquad (0 \leq x \leq 1)$$

آنگاه $L_1(0,1)$ یک جبر باناخ جابجائی خواهد بود.

توضیح. برای هر $f \in L_1(0,1)$ قرار می‌دهیم

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

داریم:

خوشتعریفی

$$\begin{aligned}(f*g)(x) &= \int_0^x F(x-y)G(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}F(x-y)G(y)dy=(F*G)(x) \qquad (0\le x\le 1)\\ \|f*g\| &= \int_0^1|(f*g)(x)|dx=\int_0^1|(F*G)(x)|dx\\ &\le \int_{-\infty}^{+\infty}\big|(F*G)(x)\big|dx=||F*G||\le ||F||||G||=||f||||g|| \qquad (0\le x\le 1)\end{aligned}$$

جابجایی:

$$(f*g)(x)=(F*G)(x)=(G*F)(x)=(g*f)(x) \qquad (0\le x\le 1)$$

شرکت پذیری: برای $0\le x\le 1$،

$$\begin{aligned}\big((f*g)*h\big)(x) &= \int_0^x(f*g)(x-y)h(y)dy=\int_0^x(F*G)(x-y)H(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}(F*G)(x-y)H(y)dy=((F*G)*H)(x)=(F*(G*H))(x)\\ &= ((G*H)*F)(x)=((g*h)*f)(x)=(f*(g*h))(x)\end{aligned}$$

سایر اصول موضوعه‌ی جبر به راحتی به دست می‌آید. $\star$

نشان می‌دهیم $L_1(0,1)$ دارای هیچ تابعک خطی– ضربی نیست و لذا واحددار نمی‌باشد. برای این منظور گیریم ε با $0<\varepsilon\le 1$ دلخواه باشد. فرض کنیم که $f\in L_1(0,1)$ چنان باشد که $f(x)=0$ برای هر $0\le x\le\varepsilon$. داریم

$$f(x)=f*f*\cdots*f(x)=0$$

برای هر $0\le x\le n\varepsilon$

توضیح. گیریم $0\le x\le 2\varepsilon$. اگر $0\le x\le\varepsilon$ آنگاه به‌وضوح $(f*f)(x)=0$. گیریم $\epsilon<x\le 2\varepsilon$ داریم

$$(f*f)(x)=\int_0^x f(x-y)f(y)dy=\int_\varepsilon^x \underbrace{f(x-y)}_{0}f(y)dg=0$$

زیرا

$$\varepsilon\le y\le x \implies -x\le -y\le -\varepsilon \implies 0\le x-y\le x-\varepsilon\le 2\varepsilon-\varepsilon=\varepsilon \implies f(x-y)=0$$

اکنون به استقراء حکم نتیجه می‌شود. $\star$

بنابراین برای nای بقدر کافی بزرگ داریم $f^n=0$، و لذا اگر ϕ یک تابعک خطی– ضربی باشد (فرض خلف)

خواهیم داشت

$$[\phi(f)]^n = \phi(f^n) = \phi(0) = 0$$

و یا $\phi(f) = 0$. اما مجموعه‌ی کلیه‌ی چنین توابع f که در یک همسایگی از $x = 0$ صفر می‌باشند در $L_1(0,1)$ چگال بوده و تابعک‌های خطی‌— ضربی پیوسته می‌باشند. در نتیجه $\phi = 0$ که این یک تناقض است.

۳.۲ فضای ایده‌آل (مدولار) ماکسیمال

یادآوری: گیریم X یک فضای باناخ و X^* دوگان آن باشد؛ یعنی

$$X^* = \{f : X \to \mathbb{C} : \ \text{خطی و پیوسته است}\ f\}.$$

به ازای هر $x \in X$، نگاشت

$$\varphi_x \ : \ X^* \longrightarrow \mathbb{C}$$

را با ضابطهٔ $(f \in X^*) \quad \varphi_x(f) = f(x)$ درنظر می‌گیریم. بنابه تعریف، توپولوژی ضعیف— ستاره بر X^* کوچکترین توپولوژی بر X^* است که کلیهٔ توابع $(\varphi_x)_{x\in X}$ را پیوسته می‌گرداند. به‌ازای هر $x \in X$ به‌وضوح φ_x خطی است. چون

$$|\varphi_x(f)| = |f(x)| \le \|f\|.\|x\| \qquad\qquad (f \in X^*)$$

φ_x نسبت به توپولوژی نرم بر X^* پیوسته است. (در واقع $\|\varphi_x\| = \|x\|$ می‌باشد). بنابراین توپولوژی ضعیف— ستاره کوچکتر از (زیرمجموعه) توپولوژی نرم بر X^* است.

به راحتی دیده می‌شود که هر باز ضعیف— ستاره اجتماعی از مقاطع متناهی $\varphi_x^{-1}(U)$ ها می‌باشد که در آن U در $\mathbb{C}$ باز است. به‌عبارت دیگر گردایهٔ $\{\varphi_x^{-1}(U) : \ x \in X \ \text{و}\ \mathbb{C}\ \text{باز در}\ U\}$ یک زیرمبنا و

$$\{\varphi_{x_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \varphi_{x_n}^{-1}(U_n) : \ n \in \mathbb{N}, \ x_1, \ldots, x_n \in X \ \text{ و } \ \mathbb{C}\ \text{باز در}\ U_1, \ldots, U_n\}$$

یک مبنا برای این توپولوژی می‌باشد. در حقیقت به‌ازاء هر $f_0 \in X^*$، گردایهٔ متشکل از کلیهٔ مجموعه‌ها به شکل

$$V(f_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \{f \in X^* : \ |f_0(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon \quad (1 \le i \le n)\} \qquad (۱)$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$، $x_1, \ldots, x_n \in X$ و $\varepsilon > 0$، یک مبنای موضعی در نقطهٔ f_0 می‌باشد، زیرا اولاً باتوجه به پیوستگی ϕ_{x_i}ها نسبت به توپولوژی ضعیف– ستاره مجموعه‌های

$$V(f_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}(B(f_0(x_i)); \varepsilon)$$

همسایگی های ضعیف– ستاره f_0 می‌باشند و ثانیاً اگر $W = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}(U_i)$ یک همسایگی مبنایی f_0 باشد آنگاه از آنجا که $f_0(x_i) = \varphi_{x_i}(f_0) \in U_i$ $(1 \leq i \leq n)$ و U_i ها در $\mathbb{C}$ بازند عدد $\varepsilon > 0$ هست که

$$B\big(f_0(x_i), \varepsilon\big) \subseteq U_i \qquad (1 \leq i \leq n)$$

و لذا

$$V(f_0; x_1, \cdots, x_n, \varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}\big(B(f_0(x_i), \varepsilon\big) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \varphi_{x_i}^{-1}(U_i) = W$$

توپولوژی ضعیف– ستاره هاسدورف می‌باشد زیرا اگر f_1 و f_2 دو عضو متمایز از X^* باشند آنگاه $x \in X$ هست که $f_1(x) \neq f_2(x)$، که با قرار دادن $\varepsilon = \frac{|f_1(x) - f_2(x)|}{2}$ خواهیم داشت

$$V(f_1; x, \varepsilon) \cap V(f_2; x, \varepsilon) = \emptyset$$

توضیح.

$$f \in V(f_1; x, \varepsilon) \cap V(f_2; x, \varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f_1(x)| < \varepsilon \;, \qquad |f(x) - f_2(x)| < \varepsilon$$

بنابراین

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leq |f_1(x) - f(x)| + |f(x) - f_2(x)| < 2\varepsilon = |f_1(x) - f_2(x)|$$

که این یک تناقض است. $\star$

قضیهٔ باناخ–آلاقلو بیان می‌کند که گوی واحد بستهٔ X^*، یعنی $\{f \in X^* : ||f|| \leq 1\}$ نسبت به توپولوژی ضعیف– ستاره فشرده است.

تعریف ۱.۳.۲ گیریم A یک جبر باناخ جابجایی و $\mathfrak{M}(A)$ مجموعهٔ کلیهٔ تابعک‌های خطی– ضربی بر A باشد. به‌ازاء هر $x \in A$، نگاشت

$$\hat{x} : \mathfrak{M}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$

با ضابطهٔ

$$\hat{x}(f) = f(x) \qquad (f \in \mathfrak{M}(A))$$

را تبدیل گلفاند x می‌گوییم. درواقع از آن‌جا که $\mathfrak{M}(A) \subseteq \{f \in A^* \ : \ ||f|| \leq 1\} \subseteq A^*$، تبدیل گلفاند $\hat{x}$ تحدید نگاشت φ_x به $\mathfrak{M}(A)$ می‌باشد.

توپولوژی گلفاند کوچکترین توپولوژی بر $\mathfrak{M}(A)$ می‌باشد که کلیهٔ عناصر $\hat{A} = \{\hat{x} \ : \ x \in A\}$ را پیوسته بگرداند. واضح است که این توپولوژی همان توپولوژی ضعیف– ستارهٔ زیرفضایی بر $\mathfrak{M}(A)$ است و به‌ازای هر، $f_0 \in \mathfrak{M}(A)$ مجموعه‌های

$$V(f_0; x_1, \ldots, x_n, \varepsilon) \cap \mathfrak{M}(A) = \{f \in \mathfrak{M}(A) \ : \ |f(x_i) - f_0(x_i)| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

که در آن $n \in \mathbb{N}$، $x_1, \ldots, x_n \in A$ و $\varepsilon > 0$، یک مبنای موضعی در نقطهٔ f_0 نسبت به توپولوژی گلفاند می‌باشد.

واضح است که $\hat{A} \subseteq C(\mathfrak{M}(A))$، که در آن $C(\mathfrak{M}(A))$ جبر کلیهٔ توابع پیوسته مختلط پیوسته بر $\mathfrak{M}(A)$ نسبت به توپولوژی گلفاند است.

از آنجا که تناظر یک به یکی بین $\mathfrak{M}(A)$ و مجموعهٔ کلیهٔ ایده‌آل‌های مدولار ماکسیمال A وجود دارد، $\mathfrak{M}(A)$ با توپولوژی گلفاند را فضای ایده‌آل مدولار ماکسیمال A می‌گویند.

عبارت تبدیل گلفاند برای نگاشت $\hat{x} \longrightarrow x$ از A بروی $\hat{A}$ نیز اطلاق می‌شود.

بنا به تعریف، رادیکال A که آن را با $rad(A)$ نمایش می‌دهیم عبارت است از مقطع کلیهٔ ایده‌آل‌های مدولار ماکسیمال A. اگر $rad(A) = \{0\}$ آنگاه A را نیم‌ساده می‌گوییم.

قضیه ۲.۳.۲ گیریم $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(A)$ فضای کلیهٔ ایده‌آل‌های ماکسیمال جبر باناخ جابجایی و یکدار $A(\neq 0)$ باشد. در این‌صورت:

(a): $\mathfrak{M}(A)$ یک فضای فشردهٔ هاسدورف است؛

(b): تبدیل گلفاند یک هومورفیسم از A بروی زیرجبر $\hat{A}$ از $C(\mathfrak{M})$ می‌باشد، که هستهٔ آن $rad(A)$ می‌باشد. بنابراین تبدیل گلفاند یک ایزومورفیسم است اگر و فقط اگر A نیم‌ساده باشد؛

(c): به ازای هر $x \in A$، برد $\hat{x}$ طیف $\sigma(x)$ می‌باشد. بنابراین

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) \leq \|x\|$$

که در آن $\|\hat{x}\|_\infty$ عبارت‌است از سوپریموم $|\hat{x}(f)|$ روی $\mathfrak{M}$ می‌باشد و $x \in rad(A)$ اگر و فقط اگر $\rho(x) = 0$.

برهان. ابتدا (b) و(c) را ثابت می‌کنیم. فرض کنیم $x, y \in A$، $\alpha \in \mathbb{C}$ و $f \in \mathfrak{M}$. در این‌صورت

$$\widehat{(\alpha x)}(f) = f(\alpha x) = \alpha f(x) = (\alpha \hat{x})(f)$$

$$\widehat{(x+y)}(f) = f(x+y) = f(x) + f(y) = (\hat{x} + \hat{y})(f)$$

و

$$\widehat{(x.y)}(f) = f(x.y) = f(x).f(y) = \hat{x}(f)\hat{y}(f) = (\hat{x}.\hat{y})(f)$$

بنابراین $x \longrightarrow \hat{x}$ یک همومرفیسم است. هستهٔ آن متشکل از کلیهٔ $x \in A$ ها است که $f(x) = 0$ برای هر $f \in \mathfrak{M}$، که باتوجه به تناظر یک به یک بین تابعک‌های خطی–ضربی وایده‌آلهای ماکسیمال، این هسته مقطع کلیهٔ ایده‌آلهای ماکسیمال A یعنی $rad(A)$ است.

λ در برد $\hat{x}$ واقع است اگر و تنها اگر $\lambda = \hat{x}(f) = f(x)$ برای یک $f \in \mathfrak{M}$ اگر و تنها اگر $\lambda \in \{f(x) \ : \ f \in \mathfrak{M}\} = \sigma(x)$. این (b) و (c) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (a)، گیریم A^* دوگان A (با در نظر گرفتن A به عنوان یک فضای باناخ) باشد. فرض می‌کنیم $K = \{f \in A^* \ : \ ||f|| \leq 1\}$. بنابه قضیهٔ باناخ–آلاقلو K، به‌طور ضعیف– ستاره فشرده است. اما باتوجه به یک قضیه $\mathfrak{M} \subseteq K$. به‌وضوح توپولوژی گلفاند بر $\mathfrak{M}$ همان توپولوژی ضعیف– ستارهٔ زیرفضایی بر $\mathfrak{M}$ است.

بنابراین کافی است نشان دهیم که $\mathfrak{M}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از A^* نسبت به توپولوژی ضعیف– ستاره است.

گیریم $\Lambda_0 \in A^*$ در بستار ضعیف– ستارهٔ $\mathfrak{M}$ باشد. نشان می‌دهیم که

$$\Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_0 y \qquad (x, y \in A) \tag{۱}$$

و

$$\Lambda_0 e = 1 \tag{۲}$$

(توجه کنید که (۲) لازم است زیرا درغیر این صورت Λ_0 باید هومومورفیسم صفر باشد که در $\mathfrak{M}$ قرار ندارد.) نقاط $x, y \in A$ و عدد $\varepsilon > 0$ را دلخواه و ثابت درنظر می‌گیریم. قرار می‌دهیم

$$W = \{\Lambda \in A^* \;:\; |\Lambda z_i - \Lambda_0 z_i| < \varepsilon \quad (1 \leq i \leq 4)\}$$

که در آن $z_1 = e$، $z_2 = x$، $z_3 = y$ و $z_4 = xy$. اکنون W یک همسایگی ضعیف- ستاره برای Λ_0 بوده و لذا شامل یک $f \in \mathfrak{M}$ می‌باشد. برای این f،

$$|1 - \Lambda_0 e| = |f(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon$$

که (۲) را نتیجه می‌دهد. همچنین چون f در (۱) صدق می‌کند، داریم:

$$\begin{aligned}\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y &= [\Lambda_0(xy) - f(xy)] + [f(x)f(y) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y] \\ &= [\Lambda_0(xy) - f(xy)] + [f(y) - \Lambda_0 y]f(x) + [f(x) - \Lambda_0 x]\Lambda_0 y\end{aligned}$$

که این نتیجه می‌دهد

$$|\Lambda_0(xy) - \Lambda_0 x \Lambda_0 y| < (1 + ||x|| + ||\Lambda_0 y||)\varepsilon \tag{۳}$$

پس اگر $\varepsilon \to 0$، آنگاه (۱) برقرار بوده و حکم ثابت است. □

قضیه ۳.۳.۲ گیریم A یک جبر باناخ جابجایی باشد. در این صورت $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(A)$ یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف بوده و اگر $\mathfrak{M} \neq \emptyset$ آنگاه $x \longrightarrow \hat{x}$ یک هومومورفیسم از A بروی زیرجبر $\hat{A}$ از $C_0(\mathfrak{M})$ با هستهٔ $rad(A)$ می‌باشد که در آن $C_0(\mathfrak{M})$ جبر باناخ کلیهٔ توابع پیوسته بر $\mathfrak{M}$ می‌باشد که در بی‌نهایت صفر می‌شوند.

برهان. اگر $\mathfrak{M}$ تهی باشد حکم بالبداهه برقرار است. درغیر این صورت قرار می‌دهیم $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$. گیریم $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(A_1)$. باتوجه به قضیهٔ (۲.۳.۲) $\mathfrak{M}_1$ یک فضای فشردهٔ هاسدورف با توپولوژی گلفاند است. نگاشت F_∞ را بر $\mathfrak{M}_1$ با ضابطهٔ $F_\infty(x + \lambda e) = \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in A$) درنظر می‌گیریم. اگر $f \in \mathfrak{M}$، آنگاه تابعک F_f با ضابطهٔ $F_f(x + \lambda e) = f(x) + \lambda$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ و $x \in A$) در $\mathfrak{M}_1$ قرار داشته و داریم $F_f \neq F_\infty$. بالعکس اگر $F \in \mathfrak{M}_1$ و $F \neq F_\infty$ آنگاه $f(x) = F(x, 0)$ ($x \in A$) متعلق به $\mathfrak{M}$ است و داریم $F_f = F$. بنابراین نگاشت $f \xrightarrow{\psi} F_f$ یک تناظر یک به یک بین $\mathfrak{M}$ و $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ می‌باشد. حال چون

$$V(F_f; x_1 + \lambda_1 e, \ldots, x_n + \lambda_n e, \varepsilon) \cap (\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\})$$

$$= \{F_g \ : \ |F_f(x_i + \lambda_i e) - F_g(x_i + \lambda_i e)| < \varepsilon \qquad (1 \le i \le n)\}$$

$$= \{F_g \ : \ |f(x_i) - g(x_i)| < \varepsilon \qquad (1 \le i \le n)\}$$

$$= \psi(V(f; x_1, \dots, x_n, \varepsilon))$$

لذا نگاشت ψ یک همومورفیسم از $\mathfrak{M}$ بروی $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ (با توپولوژی زیرفضایی) می‌باشد. اما $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ موضعاً فشرده است، زیرا اگر $F_f \in \mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ آنگاه بنابه هاسدورف بودن $\mathfrak{M}_1$، همسایگی‌های V_1 و V_2 از F_f و F_∞ هستند که $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و بنابراین $\overline{V_1} \cap V_2 = \emptyset$ و لذا $\overline{V_1} \subseteq \mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$. اما $\overline{V_1}$ فشرده است و $cl_{\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}}(V_1) = \overline{V_1} \cap (\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}) = \overline{V_1}$. پس $\mathfrak{M}(A)$ موضعاً فشرده است.

چون نگاشت گلفاند پیوسته و $\mathfrak{M}_1$ فشرده می‌باشد لذا به‌ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\begin{aligned}\psi\{f \in \mathfrak{M} \ : \ |\hat{x}(f)| \ge \varepsilon\} = \{F_f \ : \ |f(x)| \ge \varepsilon\} &= \{F_f \ : \ |(\widehat{x + 0e})(F_f)| \ge \varepsilon\} \\ &= \{F \in \mathfrak{M}_1 \ : \ |(\widehat{x + 0e})(F)| \ge \varepsilon\}\end{aligned}$$

فشرده بوده و لذا $\{f \in \mathfrak{M} \ : \ |\hat{x}(f)| \ge \varepsilon\}$ فشرده است. پس $\hat{x} \in C_0(\mathfrak{M})$. بقیهٔ احکام مشابه قضیهٔ (۲.۳.۲) می‌باشند. □

نتیجه ۴.۳.۲ فضای $\mathfrak{M}(A_1)$ که $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ از $\mathfrak{M}(A)$ با فشرده‌سازی تک نقطه‌ای (به وسیلهٔ F_∞) به‌دست می آید. در حالتی که $\mathfrak{M}(A)$ خود فشرده است، F_∞ یک نقطهٔ ایزولهٔ $\mathfrak{M}(A_1)$ است.

تمرین: اگر $\mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$، نشان دهید $\mathfrak{M}(A)$ فشرده است اگر و تنها اگر A واحددار باشد.

تعریف ۵.۳.۲ گیریم A یک جبر باناخ جابه‌جایی و یکدار باشد. زیرمجموعهٔ $K \subseteq A$ را یک دستگاه مولدها برای زیرجبر بستهٔ A_0 گوییم هرگاه A_0 کوچکترین زیرجبر بستهٔ A حاوی $K \cup \{e\}$ باشد، و در این‌حالت می‌نویسیم $A_0 = [K]$. اگر $A = [K]$ آنگاه گوییم A به‌وسیلهٔ K تولید می‌شود. اگر A به‌وسیلهٔ $K = \{x\}$ تولید شود که در آن $x \in A$، آنگاه x را یک مولد A و جبر A را تولیدشدهٔ یکانی [۱] می گویند.

تمرین: با مفروضات فوق ثابت کنید $A = [K]$ اگر و تنها اگر مجموعهٔ کلیهٔ چندجمله‌ای‌ها از عناصر K یعنی عبارات $\sum a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ (مجموع متناهی) که در آن $n \in \mathbb{N}$، $a_{i_1, \dots, i_n} \in \mathbb{C}$، $x_1, \dots, x_n \in K$ و $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ در A چگال باشد.

[۱] Singly Generated

قضیه ۶.۳.۲ اگر K یک دستگاه از مولدها برای جبر باناخ جابجایی و یکدار A باشد آنگاه گردایهٔ متشکل از کلیهٔ مجموعه‌های زیر

$$V(f;x_1,\ldots,x_n,\varepsilon) \quad ; \qquad x_1,\ldots,x_n\in K\ ,\ \varepsilon>0\ ,\ f\in m(A)$$

یک پایه برای $\mathfrak{M}(A)$ تشکیل می‌دهد.

برهان. باید نشان دهیم که هر همسایگی دلخواه $U=V(f_0;x_1,\ldots,x_n,\varepsilon)$ که در آن $x_1,\ldots,x_n\in A$، شامل یک همسایگی $V=V(f_0;y_1,\ldots,y_k,\delta)$ با شرط $y_1,\ldots,y_k\in K$ می‌باشد.

باتوجه به تمرین فوق چندجمله‌ای‌های P_i با ضرایب مختلط و عناصر $y_{i,j}\in K$ موجودند به طوری که

$$||P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i})-x_i||<\frac{\varepsilon}{3} \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{۱}$$

اکنون باتوجه به پیوستگی چندجمله‌ای‌های P_i عدد $\delta>0$ هست که

$$\begin{aligned} V &= V(f_0;y_{1,1},\ldots,y_{1,k_i},\ldots,y_{n,1},\ldots,y_{n,k_n};\delta) \\ &\subseteq V(f_0;P_1(y_{1,1},\ldots,y_{1,k_1}),\ldots,P_n(y_{n,1},\ldots,y_{n,k_n});\frac{\varepsilon}{3}) \end{aligned} \tag{۲}$$

زیرا

$$|f(P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i}))-f_0(P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i}))|$$

$$=|P_i(f(y_{i,1}),\ldots,f(y_{i,k_i}))-P_i(f_0(y_{i,1}),\ldots,f_0(y_{i,k_i}))|\longrightarrow 0$$

هرگاه $f(y_{i,j})\to f_0(y_{i,j})$ $(1\le j\le k_i)$.

نشان می‌دهیم $V\subseteq U$ که از این‌جا حکم به‌دست می‌آید. گیریم $f\in V$، باتوجه به (۱) و (۲) و این که $\|f\|\le 1$، داریم:

$$\begin{aligned} |f(x_i)-f_0(x_i)| &\le |f(x_i)-f(P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i}))| \\ &\quad +|f(P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i}))-f_0(P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i}))| \\ &\quad +|f_0(P_i(y_{i,1},\ldots,y_{i,k_i}))-f_0(x_i)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \qquad (i=1,\ldots,n) \end{aligned}$$

و لذا $f \in U$. $\square$

نتیجه ۷.۳.۲ اگر A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار با مولد شمارا باشد آنگاه $\mathfrak{M}(A)$ دارای مبنای موضعی شمارش‌پذیر بوده که باتوجه به فشردگی آن یک فضای متریک تام خواهد بود.

قضیه ۸.۳.۲ اگر A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار با n مولد باشد آنگاه $\mathfrak{M}(A)$ با زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از $\mathbb{C}^n$ همئومورفیک است.

برهان. گیریم $x_1, \ldots, x_n \in A$ دستگاهی از مولدها برای A باشد. نشان می‌دهیم که نگاشت $f \longrightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ یک همئومورفیسم از $\mathfrak{M}(A)$ بروی زیرمجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{C}^n$ است. این نگاشت یک به یک است زیرا اگر برای $f_1, f_2 \in \mathfrak{M}(A)$ داشته باشیم $f_1(x_i) = f_2(x_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ آنگاه برای هر $u = \sum a_{i_1,\ldots,i_n} x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n}$ (مجموع متناهی) که $a_{i_1,\ldots,i_n} \in \mathbb{C}$ و $i_1, \ldots, i_n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ خواهیم داشت $f_1(u) = f_2(u)$ که باتوجه به چگال بودن چنین uها در A و پیوستگی f_1 و f_2 نتیجه می‌شود برای هر $x \in A$، $f_1(x) = f_2(x)$. چون هریک از توابع مولفه‌ای $f \xrightarrow{\hat{x_i}} f(x_i) = \hat{x_i}(f)$ پیوسته‌اند، نگاشت $f \longrightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ پیوسته می‌باشد. چون نگاشت اخیر یک نگاشت یک به یک و پیوسته از فضای فشرده $\mathfrak{M}(A)$ بروی یک فضای هاسدورف است لذا یک همئومورفیسم می‌باشد، و درنتیجه می‌توان $\mathfrak{M}(A)$ را با مجموعهٔ $\{(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathbb{C}^n \ : \ f \in \mathfrak{M}(A)\}$ یکی گرفت. $\square$

تعریف ۹.۳.۲ گیریم $A \neq 0$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار بوده و $x_1, \ldots, x_n \in A$. مجموعهٔ

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \{(f(x_1), \ldots, f(x_n)) \in \mathbb{C}^n \ : \ f \in \mathfrak{M}(A)\} \tag{۱}$$

را طیف مشترک[۱] عناصر $x_1, \ldots, x_n$ می‌گویند. چون توابع مولفه‌ای $f \xrightarrow{\hat{x_i}} f(x_i)$ پیوسته‌اند لذا $f \longrightarrow (f(x_1), \ldots, f(x_n))$ پیوسته بوده که باتوجه به فشرده بودن $\mathfrak{M}(A)$، $\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ زیرمجموعهٔ فشرده و ناتهی از $\mathbb{C}^n$ است. واضح است که این تعریف با طیف عنصر $x \in A$ سازگار است زیرا همانطور که دیدیم

$$\sigma(x) = \{f(x) \ : \ f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

[۱] Joint Spectrum

می‌باشد. قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که برای یک جبر به‌طور متناهی تولیدشدهٔ A طیف مشترک یک دستگاه از مولد با $\mathfrak{M}(A)$ همئومورفیک است.

تعریف ۱۰.۳.۲ اگر A یک جبر باناخ جابجایی و بدون واحد باشد طیف نقطهٔ $x \in A$ عبارت است از طیف $x = (x, 0)$ در $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$. بنابراین در این‌حالت

$$\sigma(x) = \{F_f(x) \ : \ f \in m(A)\} \cup \{F_\infty(x)\} = \{f(x) \ : \ f \in m(A)\} \cup \{0\}\}$$

قضیه ۱۱.۳.۲ گیریم A یک جبر باناخ جابجایی بوده و $\mathfrak{M}_\tau$ نمایانگر $\mathfrak{M}(A)$ با توپولوژی τ باشد به‌طوری که

(i) کلیهٔ توابع $\hat{x}$ ($x \in A$) نسبت به τ پیوسته باشند.

(ii) $\mathfrak{M}_\tau$ یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف باشد.

در این صورت $\mathfrak{M}_\tau$ و $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(A)$ (با توپولوژی گلفاند) همئومورفیک می‌باشند.

به عبارت دیگر توپولوژی گلفاند تنها توپولوژی بر $\mathfrak{M}$ است که می‌تواند $\mathfrak{M}$ را فشردهٔ هاسدورف نموده و تمام نگاشت‌های $\hat{x}$ را پیوسته گرداند.

برهان. نگاشت همانی از $\mathfrak{M}_\tau$ بروی $\mathfrak{M}$ پیوسته است زیرا باتوجه به (i) عناصر پایهٔ توپولوژی گلفاند یعنی مجموعه‌های $\hat{x_1}^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \hat{x}_n^{-1}(U_n)$، که در آن $n \in \mathbb{N} \ , \ x_1, \ldots, x_n \in A$ و $U_1, \ldots, U_n$ در $\mathbb{C}^n$ باز می‌باشند در $\mathfrak{M}_\tau$ بازند. حال چون $\mathfrak{M}_\tau$ فشرده و $\mathfrak{M}$ هاسدورف است لذا نگاشت همانی یک همئومورفیسم می‌باشد. $\square$

قضیه ۱۲.۳.۲ اگر ϕ یک همومورفیسم (جبری) از جبر باناخ جابجایی A_0 بتوی جبر باناخ نیم‌سادهٔ A_1 باشد آنگاه ϕ پیوسته است.

برهان. گیریم در A_0، $x_n \longrightarrow x$ و در A_1، $\phi(x_n) \to y$. بنابه قضیهٔ نمودار بسته کافی است ثابت کنیم $y = \phi(x)$. اگر $f \in \mathfrak{M}(A_1)$ آنگاه $\tilde{f} = f \circ \phi$ یک همومورفیسم مختلط بر A_0 بوده (ممکن است $\tilde{f} = 0$) و لذا پیوسته است. بنابراین $f(\phi(x_n)) = \tilde{f}(x_n) \to \tilde{f}(x) = f(\phi(x))$. از طرف دیگر باتوجه به پیوستگی f، داریم $f(\phi(x_n)) \to f(y)$. پس $f(\phi(x)) = f(y)$ یا $f(\phi(x) - y) = 0$ برای هر $f \in \mathfrak{M}(A_1)$. بنابراین

$\phi(x) - y \in rad(A_1) = \{0\}$، یا $y = \phi(x)$. □

نتیجه ۱۳.۳.۲ هر اندومورفیسم (جبری) از یک جبر باناخ نیم‌ساده پیوسته است.

نتیجه ۱۴.۳.۲ اگر جبرهای باناخ و جابجایی A_1, A_2 به‌طور جبری ایزومرفیک بوده و یکی از آن‌ها نیم‌ساده باشد آنگاه آن‌ها بطور توپولوژیکی ایزومرفیک هستند.

برهان. اگر ϕ یک ایزومورفیسم از A_1 بروی A_2 باشد آنگاه A_1, A_2 هر دو نیم‌ساده بوده و لذا بنا به قضیهٔ (۱۲.۳.۲) ϕ, ϕ^{-1} هردو پیوسته‌اند. □

درحالت خاص بر یک جبرجابجایی نیم‌ساده حداکثر یک نرم می‌توان تعریف کرد که آن را به یک جبر باناخ تبدیل کند. به‌عبارت دقیق‌تر اگر جبرجابجایی و نیم‌سادهٔ A با نرم‌های $\|.\|$ و $|||.|||$ باناخ باشد آنگاه $\|.\|$ و $|||.|||$ با هم معادلند.

توضیح: نگاشت $id : (A, \|.\|) \longrightarrow (A, |||.|||)$ را در نظر بگیرید. ⋆

تبصره. نتیجهٔ اخیر درمورد جبرهای باناخ نیم‌سادهٔ غیرجابجایی نیز برقرار است (جانسون) که یکی از حالت‌های خاص مهم آن به‌صورت زیر است.

قضیه ۱۵.۳.۲ (Eidelheit) نرم جبر باناخ $B(X)$ متشکل از کلیهٔ اندومورفیسم‌ها بر فضای باناخ X به‌طور منحصر بفرد تعیین می‌شود.

(برای اثبات رجوع شود به کتاب جبرهای باناخ Rickart)

۴.۲ شعاع طیفی و رادیکال

گیریم $A \neq 0$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار باشد. دیدیم که به‌ازای هر x، $\sigma(x) = \{f(x) \ : \ f \in \mathfrak{M}(A)\}$. بنابراین

$$\rho(x) = \sup\{|f(x)| \ : \ f \in \mathfrak{M}(A)\} = \max\{|\hat{x}(f)| \ : \ f \in \mathfrak{M}(A)\}$$

از اینجا به‌راحتی نتیجه می‌شود که:

(i) $\rho(0)=0$؛

(ii) $\rho(\alpha x)=|\alpha|\rho(x)$؛

(iii) $\rho(x+y)\leq\rho(x)+\rho(y)$ و $\rho(xy)\leq\rho(x)\rho(y)$.

بنابراین ρ یک شبه نرم جبری بر A می‌باشد. به‌علاوه، به‌وضوح داریم $\rho(e)=1$.

عنصر $x\in A$ را پوچ‌توان تعمیم یافته گوییم هرگاه $\lim_{n\to\infty}||x^n||^{\frac{1}{n}}=0$. واضح است که هر عضو پوچ‌توان یک عضو پوچ‌توان تعمیم‌یافته است. از آن‌جا که $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}||x^n||^{\frac{1}{n}}$، داریم

$$x \text{ پوچ تعمیم‌یافته است} \Leftrightarrow \rho(x)=0\Leftrightarrow\forall f\in\mathfrak{M}(A)\ ;\ f(x)=0\Leftrightarrow x\in\bigcap_{M\in\mathfrak{M}}M=rad(A).$$

درنتیجه عناصر پوچ‌توان تعمیم‌یافته دقیقاً عناصر $rad(A)$ می‌باشند.

اگر $|||.|||$ نرمی معادل با نرم A باشد آنگاه

$$\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}|||x^n|||^{\frac{1}{n}}=\inf_n|||x^n|||^{\frac{1}{n}}$$

زیرا $C_1,C_2>0$ای هستند که همواره $|||x|||\leq C_2\|x\|$ و $\|x\|\leq C_1|||x|||$. پس به‌ازای هر n، $|||x^n|||\leq C_2\|x^n\|$ ، $\|x^n\|\leq C_1|||x^n|||$، و لذا

$$\begin{aligned}\rho(x)=\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}\leq\lim C_1^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\inf|||x^n|||^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\inf|||x^n|||^{\frac{1}{n}}\\ &\leq \lim_{n\to\infty}\sup|||x^n|||^{\frac{1}{n}}\\ &\leq \lim C_2^{\frac{1}{n}}\lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}}=\rho(x)\end{aligned}$$

که از اینجا $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}|||x^n|||^{\frac{1}{n}}$.

یک نرم پذیرفتنی بر A نرمی مانند $||x||_a$ است که با نرم اولیهٔ $||x||$ معادل بوده و در شرایط $\|xy\|_a\leq\|x\|_a.\|y\|_a$ و $\|e\|_a=1$ صدق می‌کند. گیریم D مجموعهٔ کلیهٔ نرم‌های پذیرفتنی بر A باشد. در این صورت قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیه ۱.۴.۲ (Bohnenblust-Karlin) اگر $A\neq 0$ یک جبر باناخ واحددار باشد آنگاه

$$\rho(x)=\inf\{||x||_a\ :\ ||.||_a\in D\} \qquad (۱)$$

برهان. می‌توان فرض کرد که $\|e\| = 1$. به‌ازای هر $\|.\|_a \in D$، داریم

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^n||_a^{\frac{1}{n}} \leq ||x||_a \tag{۲}$$

بنابراین $\rho(x)$ یک بند پایین برای مجموعهٔ مزبور می‌باشد. برای تکمیل اثبات کافی است نشان دهیم اگر $x_0 \in A$ و $\rho(x_0) < 1$، آنگاه نرمی پذیرفتنی مانند $\|.\|_0$ هست که $\|x_0\|_0 \leq 1$.

توضیح.

$$\rho(x_0) < t \;\Rightarrow\; \rho(x_0) < t_1 < t(\exists t_1 \in \mathbb{R}) \;\Rightarrow\; \rho(\frac{x_0}{t_1}) < 1 \;\Rightarrow\; \exists\, \|.\|_0 \in D, \|\frac{x_0}{t_1}\|_0 \leq 1 \;\Rightarrow\; \|x_0\|_0 \leq t_1 < t$$

$\star$

هر عضو $x \in A$ را می‌توان به‌صورت (غیرمنحصربه‌فرد)

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k \tag{۳}$$

نوشت که در آن $a_k \in A$ و فقط تعداد متناهی از a_kها مخالف صفر هستند. قرار می‌دهیم

$$\|x\|_0 = \inf\{\sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\| \;:\; x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k, \text{ هر } a_k \in A \text{ و فقط تعداد متناهی از } a_k\text{ها ناصفرند} \}$$

چون $x_0 = e.x_0$، داریم $\|x_0\|_0 \leq \|e\| = 1$. بنابراین کافی است ثابت کنیم $\|.\|_0$ یک نرم پذیرفتنی است. اگر $x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_0^k$ و $y = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x_0^k$ به شکل (۳) باشند آنگاه $xy = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$ که در آن $c_k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l$ به شکل (۳) می‌باشد، و بنابراین

$$\begin{aligned}\|xy\|_0 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|c_k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{k} \|a_{k-l}\|\;\|b_l\| &= \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=l}^{\infty} \|a_{k-l}\|\;\|b_l\| \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \|b_l\| \sum_{k=l}^{\infty} \|a_{k-l}\| = \sum_{l=0}^{\infty} \|b_l\| \sum_{k=0}^{\infty} \|a_k\|\end{aligned}$$

که با گرفتن اینفیموم از سمت راست خواهیم داشت $\|xy\|_0 \leq \|x\|_0 . \|y\|_0$. زیرجمعی بودن $\|x\|_0$ به طریق مشابه ثابت می‌شود و به‌راحتی دیده می‌شود که $\|0\|_0 = 0$ و همواره $\|\alpha x\|_0 = |\alpha|.\|x\|_0$؛ یعنی $\|.\|_0$ یک نیم‌نرم جبری بر A است. نشان می‌دهیم که $\|.\|_a$ با نرم اولیهٔ $\|.\|$ معادل است که از این‌جا نتیجه می‌شود که $\|.\|_0$ یک نرم است. با نوشتن $x = x + 0x_0 + 0x_0^2 + \ldots$، داریم:

$$\|x\|_0 \leq \|x\| \tag{۴}$$

از طرف دیگر چون $\rho(x_0) < 1$، دنبالهٔ $\|x_0^n\|$ محدود است، مثلاً $\|x_0^n\| \leq C$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

$$(\rho(x_0) = \lim_{n\to\infty} \||x_0^n|\|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \exists N(n \geq N \Rightarrow \|x_0^n\|^{\frac{1}{n}} < 1 \Rightarrow \|x_0^n\| < 1))$$

باتوجه به (۳) داریم $\|x\| \leq C \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|a_k\|$ که با گرفتن اینفیموم از سمت راست خواهیم داشت $\|x\| \leq C\|x\|_0$. درنتیجه $\|.\|_0$ نرمی معادل با نرم اولیهٔ $\|.\|$ می‌باشد. بالاخره، چون بنابه (۲) و (۴)، $1 = \rho(e) \leq \|e\|_0 \leq \|e\| = 1$، داریم $\|e\|_0 = 1$ و لذا $\|.\|_a$ یک نرم پذیرفتنی بوده و حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۲.۴.۲ گیریم A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار باشد. در این‌صورت

$$rad(A) = \{x \in A \ : \ e + xy \in G(A) \ , \forall y \in A\}$$

برهان. اگر $x \in rad(A)$ آنگاه به‌ازای هر $f \in \mathfrak{M}(A)$ و هر $y \in A$ داریم:

$$f(e + xy) = \underbrace{f(e)}_{1} + \underbrace{f(x)}_{0} f(y) = 1 \neq 0$$

و لذا $e + xy$ معکوس‌پذیر است. بالعکس اگر $x \notin rad(A)$، آنگاه $f_0 \in \mathfrak{M}(A)$ هست که $\alpha = f_0(x) \neq 0$. بنابراین $f_0(e + (-\frac{e}{\alpha})x) = 0$ و لذا $e + (-\frac{e}{\alpha})x$ در A معکوس‌پذیر نیست. $\square$

مثال گیریم $A = A_0 \oplus \{\lambda e\}$ که در آن $A_0 = L_1(0, 1)$. نشان می‌دهیم که $rad(A) = A_0$. قرار می‌دهیم $u(x) = 1$ $(0 \leq x \leq 1)$. داریم:

$$u^n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (0 \leq x \leq 1)$$
$$(u^{n+1}(x) = (u * u^{n-1})(x) = \int_0^x u(x-y)u^{n-1}(y)dy = \int_0^x \frac{y^{n-1}}{(n-1)!}dy = \frac{x^n}{n!})$$

و لذا

$$\|u^n\| = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}dx = \frac{1}{n!}$$

پس $\rho(u) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0$ و $u \in rad(A)$. از آن‌جا که رادیکال یک ایده‌آل است به‌ازای هر چندجمله‌ای P با ضرایب مختلط داریم $u * P(u) \in rad(A)$. اما می‌دانیم چندجمله‌ای‌ها در $L_1(0, 1)$ چگال‌بوده و $rad(A)$

بسته است. بنابراین $A_0 \subseteq rad(A)$.

توضیح.

$$P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \Rightarrow P(u)=\sum_{k=0}^{n} a_k u^k \quad \Rightarrow \quad (u*P(u))(x)=(\sum_{k=0}^{n} a_k u^{k+1})(x)$$
$$\Rightarrow \quad (u*P(u))(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^k}{k!}=\sum_{k=0}^{n} b_k x^k \qquad (b_k=\frac{a_k}{k!})$$

و

$$f\in L_1(0,1), \varepsilon>0 \quad \Rightarrow \quad \exists g\in C[0,1]; \|f-g\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$$
$$g\in C[0,1] \ \Rightarrow \ \exists P\ ; \|g-P\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad \|g-P\|_1=\int_0^1 |g-P|dx \le \|g-P\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$$

پس

$$\|f-P\|_1 \le \|f-g\|_1+\|g-P\|_1<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

از طرف دیگر اگر $f=g+\lambda e$ که در آن $g\in A_0$ و $\lambda\neq 0$، آنگاه از آن‌جا که $F_\infty(f)=\lambda\neq 0$، داریم $f\neq rad(A)$. پس $rad(A)=A_0$. ⋆

۵.۲ مقسوم‌علیه‌های توپولوژیکی صفر

تعریف ۱.۵.۲ عنصر $x\neq 0$ را در جبر باناخ و جابجایی A یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر گوییم هرگاه دنباله‌ای مانند $(x_n)\subseteq A$ موجود باشد به‌طوری که $\|x_n\|=1$ $(n=1,2,\ldots)$ و $\lim_{n\to\infty} x_n x=0$. (در جبرهای باناخ غیرجابجایی مقسوم‌علیه‌های توپولوژیکی صفر چپ، راست و دوطرفه مشابهاً تعریف می‌گردد.)

قضیه ۲.۵.۲ گیریم $A\neq 0$ یک جبر باناخ جابجایی و یکدار باشد. در این‌صورت A دارای هیچ مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر نیست اگر و فقط اگر A با میدان اعداد مختلط ایزومرفیک باشد.

برهان. اگر A با میدان اعداد مختلط ایزومرفیک (جبری) باشد آنگاه هر عضو A به‌صورت λe می‌باشد که در آن $\lambda\in\mathbb{C}$ (زیرا: اگر $\phi:\mathbb{C}\longrightarrow A$ یک ایزومرفیسم باشد آنگاه، $\phi(1)=e$ و $\phi(\lambda)=\phi(1.\lambda)=\lambda\phi(1)=\lambda e$ برای هر $\lambda\in\mathbb{C}$). بنابراین A دارای مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر نیست (زیرا: اگر $x=\lambda e\neq 0$ یک مقسوم‌علیه

توپولوژیکی صفر باشد آنگاه دنبالهٔ $x_n = \lambda_n e$ هست که $\|x_n\| = 1$ و $\|x x_n\| = \|\lambda x_n\| = |\lambda| \to 0$. پس $\lambda = 0$ و $x = 0$ که این تناقض است).

بالعکس، فرض می‌کنیم A با میدان اعداد مختلط ایزومرفیک (جبری) نباشد. بنابراین A دارای عضوی مانند x_0 است که به‌ازای هر $\lambda \in \mathbb{C}$، $x_0 \neq \lambda e$. داریم $\partial(\sigma(x_0)) = \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma(x_0)} \cap \sigma(x_0) \neq \emptyset$. نشان می‌دهیم که اگر

$$\lambda_0 \in \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma(x_0)} \cap \sigma(x_0)$$

آنگاه $x_0 - \lambda_0 e$ یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر در A است. فرض می‌کنیم $\lambda_n \notin \sigma(x_0)$ دنباله‌ای از اعداد مختلط باشد که به λ_0 همگرا باشد. عناصر $x_0 - \lambda_n e$ در A معکوس‌پذیرند. قرار می‌دهیم

$$y_n = \frac{(x_0 - \lambda_n e)^{-1}}{\|(x_0 - \lambda_n e)^{-1}\|} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

داریم $\|y_n\| = 1$ و

$$\|(x_0 - \lambda_n e)^{-1}\| \geq \rho((x_0 - \lambda_n e)^{-1}) = \max_{f \in \mathfrak{M}(A)} |f(x_0) - \lambda_n|^{-1} \geq |\lambda_n - \lambda_0|^{-1} \to \infty$$

بنابراین

$$\|(x_0 - \lambda_0 e)y_n\| \leq \|(x_0 - \lambda_n e)y_n\| + |\lambda_n - \lambda|\|y_n\| = \|(x_0 - \lambda_n e)^{-1}\|^{-1}.\|e\| + |\lambda_n - \lambda| \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

و لذا $x_0 - \lambda_0 e$ یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است. $\square$

تبصره. قضیهٔ قبل برای جبرهای باناخ ناجابجایی یکدار و ناصفر A نیز برقرار است. در حقیقت اگر A با میدان اعداد مختلط ایزومرفیک (جبری) نباشد آنگاه A دارای زیرجبری باناخ، جابجایی، یکدار و ناصفر است که با میدان اعداد مختلط ایزومرفیک نیست و بنابه قضیهٔ قبل این زیرجبر و بالنتیجه خود A، دارای مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است.

توضیح. اگر هر زیرجبر جبر باناخ جابجایی، یکدار و ناصفر A با میدان اعداد مختلط ایزومرفیک باشد آنگاه به‌ازای هر $0 \neq x \in A$، $A_x = \overline{[x, e]}$ زیرجبر بستهٔ تولیدشده به‌وسیلهٔ x, e با $\mathbb{C}$ ایزومرفیک بوده و لذا $\lambda \in \mathbb{C}$ هست که $x = \lambda e$. بنابراین A با $\mathbb{C}$ ایزومرفیک است. $\star$

تمرین: ثابت کنید در یک جبر باناخ جابجایی و یکدار A هیچ مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر معکوس‌پذیر نیست.

برهان. گیریم $x \in A$ یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر باشد. دنبالهٔ $(x_n) \subseteq A$ هست که $\|x_n\| = 1$ و $\lim_{n\to\infty} x_n x = 0$. اگر x معکوس‌پذیر باشد آنگاه $xx^{-1} = e$. پس

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (x_n x)x^{-1} = 0$$

که این با $\|x_n\| = 1 \ (n = 1, 2, \dots)$ متناقض است. $\square$

تمرین: نشان دهید که شرط $\|x_n\| = 1$ در تعریف مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر را می‌توان با $\|x_n\| \geq \delta > 0$ تعویض نمود.

برهان.

$$\lim_{n\to\infty} xx_n = 0 \ , \ \ \|x_n\| \geq \delta \ \ \Rightarrow \ \ \Big\|\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big\| = 1 \ \ , \ \ \Big\|x\frac{x_n}{\|x_n\|}\Big\| \leq \frac{\|xx_n\|}{\delta} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$\square$

اکنون قضیهٔ کلی‌تر زیر را ثابت می‌کنیم (Zelazko)، درحقیقت می‌توان شرط جابجایی و یکدار بودن را از فرض قضیهٔ قبل حذف نمود.

قضیه ۳.۵.۲ گیریم $A \neq 0$ یک جبر باناخ باشد (نه شرط جابجایی و نه شرط یکدار بودن فرض شده‌است). در این‌صورت A دارای مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است یا A با میدان اعداد مختلط ایزومورفیک است.

برهان. گیریم A با میدان اعداد مختلط ایزومورفیک نباشد. در این‌صورت زیرجبری جابجایی باناخ و ناصفر از آن وجود دارد که با میدان اعداد مختلط ایزومورفیک نیست (چرا؟)

بنابراین بدون آن‌که خللی به کلیت استدلال وارد شود می‌توان فرض کرد که A جابجایی است. باتوجه به قضیهٔ (۲.۵.۲) می‌توان فرض کرد که A دارای واحد نیست. قرار می‌دهیم $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$. چون A_1 با $\mathbb{C}$ ایزومورفیک نیست

$$(A_1 \cong \mathbb{C} \Rightarrow \forall x \in A \ , \exists\lambda(x) \ ; x = \lambda(x)e \Rightarrow A = 0 \ \ \text{تناقض})$$

لذا بنابر قضیهٔ (۲.۵.۲) A_1 دارای مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است. بنابراین عناصر $x_n \in A$ و اعداد $\lambda_n \in \mathbb{C}$ که $n = 0, 1, 2, \dots$، موجودند به‌طوری که $(n = 0, 1, 2, \dots) \ , \ \|x_n\| + |\lambda_n| = 1$

و $\lim_{n\to\infty}\|(x_0+\lambda_0 e)(x_n+\lambda_n e)\|=0$. واضح است که $x_0\neq 0$. دنبالهٔ (λ_n) محدود بوده و لذا دارای زیردنباله‌ای همگرا است. با گذار به زیردنباله می‌توان فرض کرد که $\lambda_n\to\lambda$. بنابراین

$$\begin{aligned}\|(x_0+\lambda_0 e)(x_n+\lambda e)\| &= \|(x_0+\lambda_0 e)(x_n+\lambda_n e)+(\lambda-\lambda_n)(x_0+\lambda_0 e)\|\\ &\leq \|(x_0+\lambda_0 e)(x_n+\lambda_n e)\|+|\lambda-\lambda_n|\to 0 \quad (n\to\infty) \qquad (۱)\end{aligned}$$

پس $\lambda_0\lambda=0$. سه‌حالت تشخیص می‌دهیم.

حالت اول: $\lambda_0=\lambda=0$. در این‌صورت از آن‌جا که $\lim_{n\to\infty}\|x_n\|=1-\lim_{n\to\infty}|\lambda_n|=1$، برای n های به‌قدر کافی بزرگ داریم $\|x_n\|\geq\frac{1}{2}$. حال چون باتوجه به (۱)، $\lim_{n\to\infty}\|x_0x_n\|=0$، لذا x_0 یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر برای A است.

حالت دوم: $\lambda_0=0$ و $\lambda\neq 0$. بنابراین باتوجه به (۱)، $x_0(x_n+\lambda e)\to 0$. ابتدا فرض می‌کنیم که (x_n) همگرا باشد، مثلاً $x_n\to y(\in A)$ (A بسته است). در این‌صورت $x_0(y+\lambda e)=0$ و لذا $z\in A$ هست که $u:=z(y+\lambda e)\neq 0$، زیرا در غیر این‌صورت عنصر $-\frac{y}{\lambda}$ واحد جبر A بوده که یک تناقض است. پس $u\in A$ و $ux_0=0$، و بنابراین A دارای مقسوم‌علیه صفر و بوضوح مقسوم علیه توپولوژیکی صفر است. اکنون گیریم (x_n) واگرا باشد. بنابراین شرط کوشی برقرار نبوده و لذا

$$\exists\ \delta>0\ \ \forall k\ \ \exists\ m_k,\ n_k\ (m_k,n_k\geq k\ ,\ \|x_{m_k}-x_{n_k}\|\geq\delta)$$

حال چون

$$x_0(x_{m_k}-x_{n_k})=x_0(x_{m_k}+\lambda e)-x_0(x_{n_k}+\lambda e)\to 0 \quad (k\to\infty)$$

لذا x_0 یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است.

حالت سوم: $\lambda_0\neq 0$ و $\lambda=0$. بنابه (۱) داریم $(x_0+\lambda_0 e)x_n\to 0$. به مانند حالت قبل $y\in A$ هست که $u:=(x_0+\lambda_0 e)y\neq 0$. پس $u\in A$، $ux_n\to 0$ و $\|x_n\|=1-|\lambda_n|\to 1-|\lambda|=1$، و لذا A دارای مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است. □

قرارداد: گردایهٔ کلیهٔ جبرهای باناخ جابجایی را به BC و گردایهٔ کلیهٔ جبرهای باناخ جابجایی و واحددار را به BC_e نشان می‌دهیم.

تعریف ۴.۵.۲ گیریم $A \in BC_e$. جبر $A_1 \in BC_e$ را یک توسیع یا ابرجبر A گوییم هرگاه A_1 شامل زیرجبری (بسته) شامل e و به‌طور توپولوژیکی ایزومورفیک با A باشد. در این‌حالت می‌نویسیم $A \subseteq A_1$. توسیع A_1 از A را ایزومتریک گوییم هرگاه زیرجبر مزبور با A به‌طور ایزومتری ایزومورفیک باشد.

تعریف ۵.۵.۲ عضو $x \in A \in BC_e$ را تکین دائمی گوییم هرگاه در هر ابرجبر $A \subseteq A_1$ تکین (غیرمعکوس‌پذیر) باشد.

قضیه ۶.۵.۲ عضو $0 \neq z \in A \in BC_e$ تکین دائمی است اگر و فقط اگر یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر باشد.

برهان. یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر در A در هر توسیع $A \subseteq A_1$ نیز یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است (بنابه تمرین فوق) و لذا در A_1 معکوس‌پذیر نیست، یعنی تکین دائمی است. □

توضیح. گیریم $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A) \subseteq A_1$ یک ایزومرفیسم توپولوژیکی باشد.

x مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر $\Leftarrow\ \exists(x_n) \subseteq A,\ \|x_n\| = 1,\ x_nx \to 0\ (n \to \infty)$

$$\|\varphi(x)\| \leq C_1\|x\|\ ,\ \|x\| \leq C_2\|\varphi(x)\| \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(x_n)\| \leq C_1\|x_n\| = C_1,\ \varphi(x) \neq 0$$

و
$$\|\varphi(x_n)\varphi(x)\| = \|\varphi(x_nx)\| \leq C_1\|x_nx\| \to 0 \qquad (n \to \infty) \qquad \star$$

اکنون فرض می‌کنیم z یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر نباشد. ابرجبری مانند $A \subseteq A_1$ می‌سازیم که z در A_1 معکوس‌پذیر باشد. گیریم $\tilde{A} = l_1(\mathbb{N} \cap \{0\} \to A)$ جبر کلیهٔ عناصری به شکل صوری

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_nt^n \qquad (x_n \in A\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots)$$

(کلیهٔ دنباله‌های $(x_0, x_1, \ldots) \in A^{\mathbb{N}\cap\{0\}}$) باشد که

$$\|\tilde{x}\| = \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\| < \infty$$

به‌راحتی دیده می‌شود که $\tilde{A}$ با جمع و ضرب مولفه‌وار و ضرب کوشی یک جبر باناخ با واحد $e = et^0 + 0t^1 + \ldots$ بوده

$$\Big(\tilde{x}\tilde{y} = (\sum_{n=0}^{\infty} x_nt^n)(\sum_{n=0}^{\infty} y_nt^n) \quad = \quad (x_0, x_1, x_2, \ldots).(y_0, y_1, y_2, \ldots)$$

$$\begin{aligned} &= (x_0y_0, x_0y_1 + x_1y_0, \ldots, \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}, \ldots) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}) t^n \Big) \end{aligned}$$

و $\tilde{A}$ با درنظر گرفتن ایزومورفیسم ایزومتری

$$x \longrightarrow \tilde{x} = xt^0 + 0t^1 + \ldots (= (x, 0, 0, \ldots))$$

یک ابرجبر از A است. داریم $\delta := \inf_{\|y\|=1} \|zy\| > 0$. بدون آن‌که خللی به کلیت استدلال وارد شود. (با تعویض z با $\frac{z}{\delta}$) می‌توان فرض کرد که $\delta = 1$. بنابراین

$$\|zy\| \geq \|y\| \qquad (y \in A) \tag{۱}$$

ایده‌آل $I = \overline{(e - z.t)\tilde{A}} \subseteq \tilde{A}$ و جبر خارج‌قسمتی $A_1 = \frac{\tilde{A}}{I}$ را درنظر می‌گیریم.

اگر $[x(t)] = x(t) + I$ نمایشگر همدستهٔ $x(t) \in \tilde{A}$ باشد، آن‌گاه به‌وضوح $[e] = [z][t]$. $(e = (e, 0, 0, \ldots)\ ,\ z = (z, 0, 0, \ldots)\ ,\ t = (0, 1, 0, \ldots))$. نشان می‌دهیم $x \longrightarrow [x]$ یک ایزومتری از A بتوی A_1 است. اما این مطلب نتیجه‌ای از برآوردهای زیر است

$$\|[x]\| = \inf_{y(t) \in \tilde{A}} \|x + (e - zt)y(t)\| \leq \|x\|$$

و باتوجه به (۱) و این‌که $y_n \to 0$ (زیرا $\sum_{n=0}^{\infty} \|y_n\| < \infty$)،

$$\begin{aligned} \|x - (e - zt)\sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n\| &= \|x - y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (zy_{n-1} - y_n)t^n\| = \|x - y_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|zy_{n-1} - y_n\| \\ &\geq \|x - y_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} (\|zy_{n-1}\| - \|y_n\|) \\ &\geq \|x - y_0\| + \sum_{n=1}^{\infty} (\|y_{n-1}\| - \|y_n\|) \\ &= \|x - y_0\| + \|y_0\| \geq \|x\| \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|[x]\| \geq \|x\|$$

پس $\|[x]\| = \|x\|$ برای هر $x \in A$ برقرار بوده و A_1 یک توسیع ایزومتری A است که z در A_1 معکوس‌پذیر است.

تبصره. همان‌طور که دیدیم هر عضو ناصفر که مقسوم‌علیه صفر توپولوژیکی نباشد در یک ابرجبر معکوس‌پذیر است. در حالت کلی توسیع منحصربه‌فرد برای هر چنین اعضایی وجود ندارد. اما قضیهٔ زیر برقرار می‌باشد.

قضیه ۷.۵.۲ گیریم A یک جبر باناخ باشد (جابجایی یا واحددار بودن فرض نشده‌است). در این‌صورت جبر باناخ $\tilde{A}$ موجود است که A با زیرجبری از $\tilde{A}$ به‌طور ایزومتری ایزومورفیک بوده و هر مقسوم‌علیه صفر توپولوژیکی A یک مقسوم‌علیه صفر در $\tilde{A}$ است.

برهان. گیریم $A' = \{x = (x_n) \subseteq A \ : \ \limsup_{n\to\infty} \|x_n\| < \infty\}$ باشد. A' با اعمال مولفه‌وار و شبه‌نرم $|||x||| = \limsup_{n\to\infty} \|x_n\|$ یک شبه فضای باناخ می‌باشد ($|||x||| = 0$ لزوماً $x = 0$ را نتیجه نمی‌دهد). قرار می‌دهیم $N = \{x \in A' \ : \ |||x||| = 0\}$. به‌راحتی دیده می‌شود که $\tilde{A} = \frac{A'}{N}$ یک جبر باناخ با نرم $|||x + N||| := |||x|||$ بوده و زیرجبر $A_0 = \{(x, x, \dots) + N \ : \ x \in A\}$ تحت نگاشت $x \longrightarrow (x, x, \dots) + N$ با A به طور ایزومتری ایزومورفیک می‌باشد. حال اگر در A $x_0 x_n \to 0$، $\|x_n\| = 1$ و $x_0 \neq 0$، آنگاه در $\tilde{A}$، $(x_0) + N \neq 0$، $(x_n) + N \neq 0$ و

$$((x_0) + N)((x_n) + N) = (x_0 x_n) + N = 0$$

زیرا $|||(x_0 x_n) + N||| = |||(x_0 x_n)||| = \limsup_{n\to\infty} \|x_0 x_n\| = 0$. بنابراین $(x_0) + N \in A_0$ یک مقسوم‌علیه صفر در $\tilde{A}$ می‌باشد. $\square$

تمرین: گیریم $A \in BC_e$، $0 \neq x \in A$ و $l_x : A \longrightarrow A$ با ضابطهٔ $l_x(y) = xy$ باشد، نشان دهید:

(i): عملگر l_x یک به یک و برو است اگر و فقط اگر x معکوس‌پذیر باشد.

(ii): عملگر l_x یک به یک نیست اگر و فقط اگر x یک مقسوم‌علیه صفر باشد.

(iii): عملگر l_x یک به یک و $\ell_x(A)$ در A بسته ولی مخالف A است اگر و فقط اگر x در A معکوس‌پذیر نبوده و مقسوم‌علیه صفر نیز نباشد.

(iv): اگر $l_x(A)$ بسته نباشد آنگاه x یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است.

(v): اگر x مقسوم‌علیه صفر نباشد آنگاه x یک مقسوم‌علیه توپولوژیکی صفر است اگر و فقط اگر $xA \neq x\bar{A}$.

فصل سوم

مطالب تکمیلی در مورد جبرهای باناخ

۱.۳ مرز شیلوف

تعریف ۱.۱.۳ گیریم $0 \neq A \in BC_e$. یک مجموعهٔ ماکسیمال ساز A عبارت است از زیر مجموعهٔ بسته‌ای مانند $F \subseteq \mathfrak{M}(A)$ بطوریکه به ازای هر $x \in A$

$$\max_{f \in \mathfrak{M}} |\hat{x}(f)| = \max_{f \in F} |\hat{x}(f)|$$

(می‌دانیم $\max_{f \in \mathfrak{M}} |\hat{x}(f)| = ||\hat{x}||_\infty = \rho(x)$ می‌باشد.) هر مجموعه‌ی مینیمال ماکسیمال ساز را یک مرز شیلوف A می گویند.

قضیه ۲.۱.۳ اگر $0 \neq A \in BC_e$، مرز شیلوف A موجود و منحصر بفرد است که آن را به $\Gamma(A)$ نمایش می‌دهیم.

برهان. گیریم $\mathfrak{F}$ گردایه‌ی کلیه‌ی مجموعه‌های ماکسیمال ساز A باشد. داریم $\mathfrak{M} \in \mathfrak{F} \neq \phi$. رابطهٔ $\leq$ در $\mathfrak{F}$ با ضابطهٔ

$$F_1 \leq F_2 \Longleftrightarrow F_1 \supseteq F_2 \qquad (F_1, F_2 \in \mathfrak{F})$$

یک رابطه‌ی ترتیب جزیی در $\mathfrak{F}$ است. گیریم F_α زنجیری در $\mathfrak{F}$ باشد. بنا به خاصیت مقطع متناهی داریم $F := \bigcap_\alpha F_\alpha \neq \phi$ نشان می‌دهیم که $F \in \mathfrak{F}$. در واقع به ازای هر $x \in A$، مجموعه‌ی

$$S_x = \{f \in \mathfrak{M} \;\; : \;\; |\hat{x}(f)| = \rho(x)\}$$

فشرده بوده و برای هر α، $F_\alpha \cap S_x \neq \phi$. بنابراین بنا به خاصیت مقطع متناهی $F \cap S_x \neq \phi$ و در نتیجه $F \in \mathfrak{F}$.

اکنون بنا به لم زرن $(\mathfrak{F}, \leq)$ دارای عضو ماکسیمال یا بطور معادل $(\mathfrak{F}, \subseteq)$ دارای عضو مینیمال است.

اکنون نشان می‌دهیم که دقیقاً یک عضو مینیمال وجود دارد. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو مرز شیلوف (دو عضو ماکسیمال در $\mathfrak{F}$) باشند. گیریم $f_1 \in \Gamma_1$ و $U = \{f \in \mathfrak{M} \;\; : \;\; |\hat{x}_i(f)| < \epsilon \quad (1 \leq i \leq n)\}$ که در آن $x_1, \cdots, x_n \in A$ و $f_1(x_i) = 0 \;\; (1 \leq i \leq n)$ یک همسایگی مبنایی دلخواه f_1 باشد.

توضیح.

$$\big\{f \in \mathfrak{M} : \;\; |\hat{x}_i(f) - \hat{x}_i(f_1)| < \epsilon \quad (1 \leq i \leq n)\big\} = \{f \in \mathfrak{M} : \;\; |\hat{y}_i(f)| < \epsilon \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

که در آن $y_i = x_i - f_1(x_i)e$. داریم

$$f_1(y_i) = f_1(x_i) - f_1(x_i)\underbrace{f_1(e)}_{1} = 0$$

و

$$|\hat{x}_i(f) - \hat{x}_i(f_1)| < \epsilon \Longleftrightarrow |f(x_i) - f_1(x_i)| < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |f(x_i - f_1(x_i)e| < \epsilon \Longleftrightarrow |f(y_i)| < \epsilon$$

$\star$

چون $\Gamma_1 \backslash U \subsetneqq \Gamma_1$، بنا به مینیمال بودن Γ_1، $\Gamma_1 \setminus U$ مجموعه‌ی ماکسیمال ساز نیست و در نتیجه $y \in A$ هست که

$$\max_{f \in \Gamma_1 \backslash U} |\hat{y}(f)| < \rho(y)$$

با تعویض y با $\frac{y}{\rho(y)}$ می‌توان فرض کرد که $\rho(y) = 1$. همچنین با تعویض y با y^m که در آن m بقدر کافی بزرگ است می‌توان فرض کرد که

$$|\hat{x}_i(f)\hat{y}(f)| < \epsilon \qquad (1 \leq i \leq n \;\; ; \;\; f \in \Gamma_1 \backslash U)$$

بنابراین $\rho(y) = 1$ و

$$\max_{f \in \mathfrak{M}} |\hat{x}_i(f)\hat{y}(f)| = \max_{f \in \Gamma_1} |\hat{x}_i(f)\hat{y}(f)| < \epsilon \qquad (1 \leq i \leq n)$$

چون Γ_2 ماکسیمال ساز است، $f_2 \in \Gamma_2$ هست که $|\hat{y}(f_2)| = \rho(y) = 1$، و بنابراین بنا به نامساوی قبل

$$|\hat{x}_i(f_2)| = |\hat{x}_i(f_2)||\hat{y}(f_2)| = |\hat{x}_i(f_2)\hat{y}(f_2)| < \epsilon$$

پس $f_2 \in U \cap \Gamma_2 \neq \phi$. چون U یک همسایگی مبنایی دلخواه برای f_1 بود لذا $f_1 \in \overline{\Gamma}_2 = \Gamma_2$. در نتیجه $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$ که با توجه به مینیمال بودن Γ_2 خواهیم داشت $\Gamma_1 = \Gamma_2$. □

قضیه ۳.۱.۳ گیریم $0 \neq A \in BC_e$ و $f_1 \in \mathfrak{M}(A)$. در این صورت $f_1 \in \Gamma(A)$ اگر و تنها اگر برای هر همسایگی U از f_1، عضو $y \in A$ باشد که

$$\sup_{f \in \mathfrak{M} \setminus U} |\hat{y}(f)| < \sup_{f \in U} |\hat{y}(f)| \qquad (۱)$$

برهان. گیریم $f_1 \in \Gamma(A)$. کافی است (۱) را برای همسایگی‌های مبنایی f_1 ثابت کنیم. گیریم

$$U_1 = \{f \in \mathfrak{M} \;\; : \;\; |\hat{x}_i(f)| < \epsilon \quad (1 \leq i \leq n)\}$$

که در آن $f_1(x_i) = 0 \;\; (1 \leq i \leq n)$ یک همسایگی مبنایی دلخواه برای f_1 باشد. با توجه به اثبات قضیهٔ (۲.۱.۳)، $y \in A$ هست که $\rho(y) = 1$، $\max_{f \in \Gamma(A) \setminus U} |\hat{y}(f)| < 1$ و

$$\max_{f \in \mathfrak{M}(A)} |\hat{y}(f)\hat{x}_i(f)| < \epsilon \qquad (1 \leq i \leq n) \qquad (۲)$$

پس

$$1 = \rho(y) = \max_{f \in \Gamma(A)} |\hat{y}(f)| = \max_{f \in \Gamma(A) \cap U} |\hat{y}(f)| \leq \sup_{f \in U} |\hat{y}(f)| \leq \sup_{f \in \mathfrak{M}} |\hat{y}(f)| = \rho(y) = 1$$

و لذا $\sup_{f \in U} |\hat{y}(f)| = 1$. امّا $\max_{f \in \mathfrak{M}(A) \setminus U} |\hat{y}(f)| < 1$، زیرا از آنجا که به ازای هر $f \in \mathfrak{M}(A)$

$$|\hat{y}(f)| = 1 \quad \overset{(۲)}{\Longrightarrow} \quad |\hat{x}_i(f)| < \epsilon \quad (1 \leq i \leq n) \quad \Longrightarrow \quad f \in U$$

داریم

$$f \notin U \quad \Longrightarrow \quad |\hat{y}(f)| < 1$$

بالعکس، گیریم f_1 دارای خاصیت فوق باشد. لذا به ازای هر همسایگی U از f_1، داریم $\Gamma(A) \cap U \neq \phi$.
بنابراین $f_1 \in \overline{\Gamma(A)} = \Gamma(A)$.

توضیح. اگر $\Gamma(A) \cap U = \phi$ آنگاه

$$\Gamma(A) = (\Gamma(A) \setminus U) \cup (\Gamma(A) \cap U) = \Gamma(A) \backslash U$$

پس

$$\rho(y) = \sup_{f \in \Gamma(A)} |\hat{y}(f)| = \sup_{f \in \Gamma(A) \backslash U} |\hat{y}(f)| \leq \sup_{f \in \mathfrak{M} \backslash U} |\hat{y}(f)| < \sup_{f \in U} |\hat{y}(f)| \leq \rho(y)$$

لذا $\rho(y) < \rho(y)$ که این یک تناقض است. ⋆

□

قضیه ۴.۱.۳ اگر $x \in A \in BC_e$ آنگاه داریم

$$\partial[\sigma(x)] \subseteq \hat{x}(\Gamma)$$

برهان. چون $\hat{x}$ پیوسته و Γ فشرده است $\hat{x}(\Gamma)$ زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از $\mathbb{C}$ است. بنابراین اگر $\lambda_0 \notin \hat{x}(\Gamma)$، $\delta > 0$ ای هست که

$$\min_{f \in \Gamma} |\hat{x}(f) - \lambda_0| > \delta$$

اگر داشته باشیم $\lambda_0 \in \partial[\sigma(x)]$ (فرض خلف) آنگاه $\lambda_1 \notin \sigma(x)$ هست که

$$|\lambda_0 - \lambda_1| < \frac{\delta}{2}$$

اکنون به ازای هر $f \in \Gamma$ داریم

$$|\hat{x}(f) - \lambda_1| \geq |\hat{x}(f) - \lambda_0| - |\lambda_0 - \lambda_1| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

بنابراین اگر $u = (x - \lambda_1 e)^{-1}$، داریم

$$\rho(u) = \max_{f \in \Gamma} \left| \frac{1}{\hat{x}(f) - \lambda_1} \right| = \left(\min_{f \in \Gamma} |\hat{x}(f) - \lambda_1| \right)^{-1} < \frac{2}{\delta}$$

امّا از آنجایی که $\lambda_0 \in \sigma(x)$، $f_0 \in \mathfrak{M}(A)$ هست که $\hat{x}(f_0) = \lambda_0$، و بنابراین

$$\rho(u) \geq |\hat{u}(f_0)| = |(\hat{x}(f_0) - \lambda_1)^{-1}| = |\lambda_0 - \lambda_1|^{-1} > \frac{2}{\delta}$$

که این تناقض حکم را ثابت می‌کند. □

قضیه ۵.۱.۳ گیریم $A \in BC_e$، $x, y \in A$ و به ازای هر $f \in \Gamma(A)$

$$|\hat{x}(f) - \hat{y}(f)| < |\hat{x}(f)| \qquad (۱)$$

آنگاه x منفرد است اگر و تنها اگر y منفرد باشد.

برهان. با توجه به فشرده بودن $\Gamma = \Gamma(A)$ و نامساوی (۱) عدد طبیعی $n > 1$ هست که

$$n \cdot \min_{f \in \Gamma} (|\hat{x}(f)| - |\hat{x}(f) - \hat{y}(f)|) > \rho(x - y) \qquad (۲)$$

اکنون دنباله‌ی متناهی

$$nx, (n-1)x + y, (n-2)x + 2y, \cdots, (n-k)x + ky, \cdots, ny$$

را در نظر می‌گیریم. اگر حکم فوق برقرار نباشد جمله‌ی اوّل یا جمله‌ی آخر معکوس پذیر نیست. عدد طبیعی $0 \leq k \leq n$ هست که $(n-k)x + ky$ معکوس پذیر بوده ولی جمله‌ی قبل یا جمله‌ی بعد آن معکوس پذیر نیست و لذا به هسته‌ی یک $f_0 \in \mathfrak{M}$ متعلق است. قرار می‌دهیم $u = [(n-k)x + ky]^{-1}$. داریم $\max_\Gamma |\hat{u}(f)| = \max_{\mathfrak{M}} |\hat{u}(f)|$ و لذا

$$\min_{\Gamma} |\hat{u}(f)^{-1}| = \min_{\mathfrak{M}} |\hat{u}(f)^{-1}|$$

بنابراین با توجه به (۲) داریم

$$\begin{aligned}
\rho(x-y) &< n \cdot \min_{\Gamma}(|\hat{x}(f)| - |\hat{x}(f) - \hat{y}(f)|) \\
&\leq \min_{\Gamma}(n|\hat{x}(f)| - k|\hat{x}(f) - \hat{y}(f)|) \\
&\leq \min_{\Gamma} |n\hat{x}(f) - k[\hat{x}(f) - \hat{y}(f)]| \\
&= \min_{\mathfrak{M}} |n\hat{x}(f) - k[\hat{x}(f) - \hat{y}(f)]| \\
&\leq |n\hat{x}(f_0) - k[\hat{x}(f_0) - \hat{y}(f_0)]|
\end{aligned}$$

از آنجا که $(n-k\pm 1)x+(k\mp 1)y$ در هسته‌ی f_0 قرار دارد داریم

$$\begin{aligned}\rho(x-y) &< |n\hat{x}(f_0)-k[\hat{x}(f_0)-\hat{y}(f_0)]| \\ &= |n\hat{x}(f_0)-k[\hat{x}(f_0)-\hat{y}(f_0)]-[(n-k\pm 1)\hat{x}(f_0)+(k\mp 1)\hat{y}(f_0)]| \\ &= |\hat{x}(f_0)-\hat{y}(f_0)| \leq \rho(x-y)\end{aligned}$$

و لذا $\rho(x-y)<\rho(x-y)$ که این یک تناقض است. $\square$

قضیه ۶.۱.۳ گیریم $A\in BC_e$ و $A_0\neq 0$ زیرجبر بسته‌ای شامل e باشد. در این صورت $f\in\Gamma(A_0)$ قابل توسیع به یک تابعک خطی — ضربی بر A است.

برهان. گیریم $x\in A_0\subseteq A$. چون $\rho(x)=\lim_{n\to\infty}||x^n||^{\frac{1}{n}}$ به زیر جبری (بسته و شامل e) که x را در بر دارد بستگی ندارد، داریم

$$\rho(x)=\max_{f\in\Gamma(A_0)}|\hat{x}(f)|=\max_{f\in\mathfrak{M}(A)}|\hat{x}(f)|$$

گیریم $f_0\in\Gamma(A_0)$ قابل توسیع به عضوی از $\mathfrak{M}(A)$ نباشد. بنابراین $M_0=Ker\ f_0$ در هیچ ایده‌آل سره از A قرار ندارد.

توضیح.

$$\begin{aligned}f_0\longleftrightarrow M_0\subseteq M\longleftrightarrow f;\ \ x\in A_0 \quad &\Longrightarrow \quad x-f_0(x)e\in M_0 \\ &\Longrightarrow \quad x-f_0(e)x\in M\Longrightarrow f(x)=f_0(x)\end{aligned}$$

$\star$

بنابراین

$$A=\Big\{\sum_{i=1}^{n}x_iz_i \quad:\quad n\in\mathbb{N},\ \ x_i\in A,\ \ z_i\in M_0 \quad (i=1,2,\cdots,n)\Big\}$$

بلاخص $e=x_1z_1+\cdots+x_nz_n$ که در آن $(1\leq i\leq n)$ $x_i\in A$ و $z_i\in M_0$. بدون آنکه خللی به کلیت استدلال وارد شود می‌توان فرض کرد که $\rho(x_i)\leq 1$ (x_i را با $\frac{x_i}{\rho(x_i)}$ و z_i را با $\rho(x_i)z_i$ تعویض می‌کنیم). گیریم $\mu>\max\{\rho(z_1),\cdots,\rho(z_n)\}$. همسایگی

$$U=\Big\{f\in\mathfrak{M}(A_0)\quad:\quad |\hat{x}_i(f)|<\frac{1}{2n\mu}\quad (i=1,\cdots,n)\Big\}$$

از f_0 در $\mathfrak{M}(A_0)$ را که $\hat{x}_i(f_0)=0 \;\; (1\le i\le n)$ از f_0 در $\mathfrak{M}(A_0)$ را در نظر می‌گیریم. با توجه به یکی از قضایای قبل، چون $f_0\in\Gamma(A_0)$، عضو $y\in A_0$ هست که

$$\sup_{f\in\mathfrak{M}(A_0)\setminus U}|\hat{y}(f)|<\sup_{f\in U}|\hat{y}(f)|$$

با تعویض y با $\frac{y}{\rho(y)}$ و سپس با تعویض y با y^m که m بقدر کافی بزرگ باشد می‌توان فرض کرد که $\sup_{f\in U}|\hat{y}(f)|=1$ و $\sup_{f\in\mathfrak{M}(A_0)\setminus U}|\hat{y}(f)|<\frac{1}{2n\mu}$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}1=\rho(y)=\rho(ye) &= \rho(y\sum_{i=1}^{n}x_iz_i)\le\sum_{i=1}^{n}\rho(yx_i)\rho(z_i)\\ &\le \mu\sum_{i=1}^{n}\rho(yx_i)=\mu\Sigma_{i=1}^{n}\max_{f\in\Gamma(A_0)}|\hat{x}_i(f)\hat{y}(f)| \qquad (۱)\end{aligned}$$

امّا

$$|\hat{x}_i(f)\hat{y}(f)|\le\frac{1}{2n\mu}\qquad (f\in U)$$

و

$$|\hat{x}_i(f)\hat{y}(f)|\le\rho(x_i)|\hat{y}(f)|\le\frac{1}{2n\mu}$$

و لذا بنا به (۱)،

$$1\le\mu\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2n\mu}=\frac{1}{2}$$

که این یک تناقض است. $\square$

تعریف ۷.۱.۳ گیریم $A\in BC_e$. بنا به تعریف $Cortex$ جبر A که به $Cor(A)$ نمایش داده می‌شود عبارت است از کلیه‌ی عناصر $f\in\mathfrak{M}(A)$ که در هر ابر جبر A قابل توسیع به یک تابعک خطی– ضربی می‌باشند.

توضیح: اگر $\varphi:A\longrightarrow\varphi(A)\subseteq A_1$ یک ایزومورفیسم توپولوژیکی باشد ($\varphi(A)$ شامل واحد A_1 است) آنگاه

$$\mathfrak{M}(\varphi(A_1))=\{f\circ\varphi^{-1}\;\;:\;\;f\in\mathfrak{M}(A)\}$$

و

$$\Gamma(\varphi(A))=\{f\circ\varphi^{-1}\;\;;\;\;f\in\Gamma(A)\}$$

$\{M$ یک ایده‌آل ماکسیمال A است $:\varphi(M)\}$ = مجموعه‌ی کلیه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال $\varphi(A)$

$$Ker(f\circ\varphi^{-1})=\{\varphi(x)\;\;:\;\;f\circ\varphi^{-1}\circ\varphi(x)=0\}=\{\varphi(x)\;\;:\;\;f(x)=0\}=\varphi(Ker\ f)$$

به عبارت دیگر $Cortex(A)$ مجموعه‌ی کلیه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال M از A است که $\varphi(M)$ در یک ایده‌آل ماکسیمال A_1 واقع باشد. بعلاوه نگاشت

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}(A) & \longrightarrow & \mathfrak{M}(\varphi(A)) \\ f & \longrightarrow & f\circ\varphi^{-1} \end{array}$$

یک هومومورفیسم است زیرا یک به یک و برو بودن آن واضح است، و چون $\mathfrak{M}(A)$ فشرده و $\mathfrak{M}(\varphi(A))$ هاسدورف است کافی است پیوسته بودن آن ثابت شود. اما

$$\begin{aligned} f_\alpha \longrightarrow f(\mathfrak{M}(A) \text{ در}) &\implies \forall\ x\in A\ ;\ f_\alpha(x)\longrightarrow f(x) \\ &\implies \forall\ x\in A\ ;\ f_\alpha\circ\varphi^{-1}(\varphi(x))\longrightarrow f\circ\varphi^{-1}(\varphi(x)) \\ &\implies f_\alpha\circ\varphi^{-1}\longrightarrow f\circ\varphi^{-1} \qquad (\mathfrak{M}(\varphi(A)) \text{ در}) \end{aligned}$$

قضیه ۸.۱.۳ گیریم $A\in BC_e$. در این صورت $\Gamma(A)\subseteq Cor(A)$ و $Cor(A)$ یک زیر مجموعه‌ی فشرده از $\mathfrak{M}(A)$ است.

برهان. رابطه‌ی $\Gamma(A)\subseteq Cor(A)$ از قضیه‌ی (۶.۱.۳) به دست می‌آید.

گیریم B توسیع دلخواهی از A و $\varphi_B:\mathfrak{M}(B)\to\mathfrak{M}(A)$ با ضابطه‌ی $f\to f|_A$ باشد. به وضوح نگاشت φ_B پیوسته است.

توضیح.

$$\begin{aligned} f_\alpha \longrightarrow f(\mathfrak{M}(B) \text{ در}) &\to \forall\ x\in B\ ;\ f_\alpha(x)\longrightarrow f(x) \\ &\implies \forall\ x\in A\ ;\ f_\alpha|_A(x)\longrightarrow f|_A(x) \\ &\implies \varphi_B(f_\alpha)\longrightarrow\varphi_B(f) \end{aligned}$$

$\star$

بنابراین $\varphi_B(\mathfrak{M}(B))$ زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از $\mathfrak{M}(A)$ است. حال چون

$$Cor(A)=\bigcap_B\varphi_B(\mathfrak{M}(B))$$

که در آن B یک ابر جبر A است، $Cor(A)$ فشرده می‌باشد.

$\square$

تعریف ۹.۱.۳ گوییم زیر مجموعه‌ی S از $A \in BC_e$ از مقسوم‌علیه‌های صفر توپولوژیکی توأم تشکیل شده‌است هرگاه برای هر زیر مجموعه‌ی متناهی $\{x_1, \cdots, x_n\}$ از S،

$$\inf_{\substack{z \in A \\ ||z|| = 1}} \sum_{i=1}^{n} ||zx_i|| = 0$$

یعنی دنباله‌ی $A \supseteq (z_k)$ باشد که $||z_k|| = 1$ و

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{n} ||z_k x_i|| = 0$$

تمرین: نشان دهید که اگر ایده‌آل ماکسیمال M از $A \in BC_e$ از مقسوم علیه‌های صفر توپولوژیکی توأم تشکیل شده باشد آنگاه $M \in Cor(A)$.

با توجه به تمرین فوق حدس زیر برقرار است.

حدس: گیریم $A \in BC_e$ و $M \in \mathfrak{M}(A)$. در این صورت $M \in Cor(A)$ اگر و تنها اگر M از مقسوم علیه‌های صفر توپولوژیکی توأم تشکیل شده باشد.

حدس فوق با توجه به قضیه‌ی زیر قوّت می‌یابد.

قضیه ۱۰.۱.۳ (قضیه‌ی زلازکو[۱]) اگر $A \in BC_e$ و $M \in \Gamma(A)$ آنگاه M از مقسوم علیه‌های صفر توپولوژیکی توأم تشکیل شده است.

۲.۳ مطالب بیشتری در مورد طیف و طیف توأم

قضیه ۱.۲.۳ گیریم $A \in B_e$ (یک جبر باناخ واحدار) و $x \in A$ باشد در این صورت زیر جبر جابجایی ماکسیمال A_0 از A موجود است که شامل x و e می‌باشد. بعلاوه A_0 بسته (باناخ) است و داریم

$$\sigma_{A_0}(x) = \sigma_A(x)$$

[۱] zelazko

برهان. گیریم $\mathcal{F} = \{B :$ یک زیر جبر جابجایی از A شامل x و e می‌باشد $B\}$
واضح است که زیر جبر تولید شده به وسیله‌ی x و e، یعنی

$$[x, e] := \Big\{ \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \;\; ; \;\; n \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C} \Big\}$$

متعلق به $\mathcal{F}$ بوده و لذا $\mathcal{F} \neq \phi$. گیریم (B_α) زنجیری در $\mathcal{F}$ باشد. قرار می‌دهیم $B_0 = \bigcup_\alpha B_\alpha$. به وضوح B_0 یک زیر جبر جابجایی شامل x و e بوده لذا یک بند بالا برای (B_α) می‌باشد. پس بنا به لم زرن $\mathcal{F}$ دارای عضو ماکسیمالی (نه لزوماً منحصر بفرد) مانند A_0 است. چون $\overline{A_0}$ نیز یک زیر جبر جابجایی و $A_0 \subseteq \overline{A_0}$، با توجه به ماکسیمال بودن A_0 داریم $A_0 = \overline{A_0}$ و در نتیجه A_0 بسته است. واضح است که $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_{A_0}(x)$.
بالعکس: گیریم $\lambda \notin \sigma_A(x)$. پس $\lambda e - x$ در A دارای معکوسی مانند y است. اگر $z \in A_0$ دلخواه باشد. داریم

$$(\lambda e - x)z = z(\lambda e - x)$$

بنابراین $y(\lambda e - x)zy = yz(\lambda e - x)y$ یا $zy = yz$؛ یعنی y با هر عضو A_0 جابجا می‌شود. حال اگر A_1 جبر تولید شده به وسیله‌ی A_0 و y، یعنی مجموعه‌ی کلیه‌ی چندجمله‌ای‌ها از عناصر $A_0 \cup \{y\}$ با ضرایب مختلط باشد آنگاه $A_0 \subseteq A_1 \in \mathcal{F}$، که با توجه به ماکسیمال بودن A_0 خواهیم داشت $A_0 = A_1$ و لذا $y \in A_0$، یعنی $\lambda e - x$ در A_0 معکوس‌پذیر است. پس $\lambda \notin \sigma_{A_0}(x)$ و لذا $\sigma_{A_0}(x) \subseteq \sigma_A(x)$. پس $\sigma_A(x) = \sigma_{A_0}(x)$. $\square$

قضیه ۲.۲.۳ اگر A_0 زیر جبر بسته‌ای از $A \in BC_e$ که شامل e بوده و $x \in A_0$، آنگاه

$$\sigma_A(x) \subseteq \sigma_{A_0}(x) \tag{۱}$$

ولی

$$\partial\sigma_{A_0}(x) \subseteq \partial\sigma_A(x) \tag{۲}$$

برهان. (۱) واضح است. برای اثبات (۲) گیریم $\lambda_0 \in \partial\sigma_{A_0}(x)$. با توجه به اثبات قضیهٔ (۲.۵.۲)، $x - \lambda_0 e$ یک مقسوم علیه صفر توپولوژیکی در A_0 و بالنتیجه در A است. پس $x - \lambda_0 e$ در A معکوس‌پذیر نیست و لذا $\lambda_0 \in \sigma_A(x)$. پس $\partial\sigma_{A_0}(x) \subseteq \sigma_A(x)$. حال از آنجا که

$$\mathbb{C} \setminus \sigma_{A_0}(x) \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$$

داریم

$$\partial\sigma_{A_0}(x) = \sigma_{A_0}(x) \cap \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma_{A_0}(x)} \subseteq \sigma_A(x) \cap \overline{\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)} = \partial\sigma_A(x)$$

و(۲) برقرار است. $\square$

تبصره: قضیه‌ی فوق برای جبرهای باناخ دلخواه (غیر جابجایی و بدون واحد) نیز برقرار است زیرا در حالت واحددار بودن A، طیف x در جبر با طیف x در زیر جبر جابجایی ماکسیمال حاوی e و x (بسته) برابر است.

توضیح: گیریم A_0' زیر جبر جابجایی ماکسیمال از A_0 حاوی x و e، و A' زیر جبر جابجایی ماکسیمال از A حاوی A_0' باشد. در این صورت

$$\partial\sigma_{A_0}(x) = \partial\sigma_{A_0'}(x) \subseteq \partial\sigma_{A'}(x) = \partial\sigma_A(x)$$

نتیجه ۳.۲.۳ گیریم $A \in BC_e$ و A_0 زیر جبر بسته‌ای از A حاوی e باشد. حال اگر $x \in A_0$ و $\sigma_{A_0}(x)$ دارای نقطه‌ی درونی نباشد آنگاه $\sigma_{A_0}(x) = \sigma_A(x)$.

برهان.

$$\sigma_{A_0}(x) = \partial\sigma_{A_0}(x) \subseteq \partial\sigma_A(x) \subseteq \sigma_A(x) \subseteq \sigma_{A_0}(x)$$

$\square$

نتیجه ۴.۲.۳ گیریم $x \in A \in BC_e$ و A_0 زیر جبر بسته از A شامل x و e باشد. حال اگر $\sigma_A(x)$ صفحهٔ مختلط $\mathbb{C}$ را ناهمبند نکند ($\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ همبند باشد) آنگاه $\sigma_A(x) = \sigma_{A_0}(x)$.

برهان. گیریم $\lambda_0 \in \sigma_{A_0}(x) \setminus \sigma_A(x)$(فرض خلف). نقطه‌ای مانند λ_1 متعلق به $\mathbb{C} \setminus \sigma_{A_0}(x)$ را اختیار می‌کنیم. قوسی پیوسته و مشمول در $\mathbb{C} \setminus \sigma_A(x)$ هست که λ_0 را به λ_1 وصل می‌کند. بنابراین این قوس حداقل در یک نقطه مرز $\sigma_{A_0}(x)$ و بالنتیجه بنا به قضیه‌ی (۲.۲.۳) در یک نقطه $\partial\sigma_A(x)$ را قطع می‌کند که این یک تناقض است.

توضیح. $$\exists\gamma : [0,1] \overset{\text{پیوسته}}{\longrightarrow} \mathbb{C} \setminus \sigma_A(x); \qquad \gamma(0) = \lambda_0 \ \ , \ \ \gamma(1) = \lambda_1$$

قرار می‌دهیم

$$t_0 = \sup\{t \in [0,1] \ \ : \ \ \gamma(t) \in \sigma_{A_0}(x)\} = \max\{t \in [0,1] \ \ : \ \ \gamma(t) \in \sigma_{A_0}(x)\}$$

داریم $t_0 < 1$ و $\gamma(t) \notin \sigma_{A_0}(x)$ برای هر $t_0 < t \leq 1$. بنابراین $\gamma(t_0)$ یک نقطه‌ی مرزی $\sigma_{A_0}(x)$ است. $\star$

این تناقض نشان می‌دهد که $\sigma_{A_0}(x) \subseteq \sigma_A(x)$ که با توجه به رابطه‌ی بدیهی $\sigma_A(x) \subseteq \sigma_{A_0}(x)$ حکم به دست می‌آید. $\square$

نتیجه ۵.۲.۳ اگر $x \in A \in BC_e$ و $\sigma_A(x)$ دارای نقطه‌ی درونی نبوده و صفحه‌ی $\mathbb{C}$ را ناهمبند نکند (در حالت خاص اگر $\sigma_A(x)$ بر محور حقیقی قرار بگیرد) آنگاه $\sigma_A(x)$ طیف x در هر زیر جبر بسته‌ی شامل x و e و همچنین هر ابر جبر از A می‌باشد.

توضیح. گیریم B یک ابر جبر A، و $\varphi : A \longrightarrow \varphi(A) \subseteq B$ یک ایزومورفیسم توپولوژیکی و $e_B \in \varphi(A)$. داریم $\sigma_A(x) = \sigma_{\varphi(A)}(\varphi(x))$ زیرا

$$\lambda \notin \sigma_A(x) \Longleftrightarrow \lambda e_A - x \in G(A) \Longleftrightarrow \lambda e_B - \varphi(x) \in G(\varphi(A)) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_{\varphi(A)}(\varphi(x))$$

حال چون $\varphi(A)$ زیر جبر بسته‌ای از B شامل $\varphi(x)$ و e_B بوده و $\sigma_{\varphi(A)}(\varphi(x))$ دارای درون تهی می‌باشد لذا

$$\sigma_A(x) = \sigma_{\varphi(A)}(\varphi(x)) = \sigma_B(\varphi(x))$$

$\star$

تبصره: نتایج فوق (بمانند قضیه‌ی ۲.۲.۳) برای جبر باناخ (غیر جابجایی یا بدون واحد) نیز برقرار است، به شرطی که اگر واحد جبر موجود باشد آنگاه واحد در هر زیر جبر همان واحد جبر باشد.

توضیح. ابتدا گیریم A واحددار باشد. فرض کنید A_0 زیر جبر بسته‌ای از A شامل x و e باشد.

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \text{زیرجبر جابجایی ماکسیمال} \\ \text{حاوی } A_o \text{ و } x \text{ و } e}}{A_0'} \quad \leq \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{زیرجبر جابجایی ماکسیمال} \\ \text{حاوی } A \text{ و } A_o'}}{A'} \quad \Longrightarrow \quad \sigma_{A_0}(x) = \sigma_{A_0'}(x) \underset{\text{(۳.۲.۳) یا (۴.۲.۳)}}{=} \sigma_{A'}(x) = \sigma_A(x)$$

اکنون گیریم B یک ابر جبر A باشد.

$$\exists \ \varphi : A \xrightarrow[\text{توپولوژیکی}]{\text{ایزومورفیسم}} \varphi(A) \subseteq B, \qquad e_B \in \varphi(A)$$

بنا به قسمت اخیر

$$\sigma_A(x) = \sigma_{\varphi(A)}(\varphi(x)) \underset{\text{(۳.۲.۳) و (۴.۲.۳)}}{=} \sigma_B(\varphi(x))$$

سرانجام گیریم A واحددار نباشد. گیریم A_0 زیر جبر بسته‌ای از A شامل x باشد.

$$A_0 \oplus \{\lambda e\} \underset{\text{زیرجبر بسته}}{\leq} A \oplus \{\lambda e\}$$

$$\sigma_{A_0}(x) = \sigma_{A_0 \oplus \{\lambda e\}}(x,0) \underset{\substack{\text{بنابه حالت}\\ \text{واحددار بودن}}}{=} \sigma_{A+\{\lambda e\}}(x,0) = \sigma_A(x)$$

اکنون گیریم B یک ابر جبر A باشد

$$\exists\ \ \varphi : A \underset{\text{توپولوژیکی}}{\overset{\text{ایزومورفیسم}}{\longrightarrow}} \varphi(A) \subseteq B$$

$$A \oplus \{\lambda e_1\} \xrightarrow{\psi} \psi(A \oplus \{\lambda e_1\}) = \varphi(A) \oplus \{\lambda e_2\} \subseteq B \oplus \{\lambda e_2\}$$

$$x + \lambda e_1 = (x, \lambda) \underset{\text{توپولوژیکی}}{\overset{\text{ایزومورفیسم}}{\longrightarrow}} (\varphi(x), \lambda) = \varphi(x) + \lambda e_2$$

$$\sigma_A(x) = \sigma_{A \oplus \{\lambda e_1\}}(x,0) = \sigma_{\varphi(A) \oplus \{\lambda e_2\}}(\varphi(x),0) \underset{\text{(۳.۲.۳) و (۴.۲.۳)}}{=} \sigma_{B \oplus \{\lambda e_2\}}(\varphi(x),0) = \sigma_B(\varphi(x))$$

$\star$

قضیه ۶.۲.۳ اگر A یک جبر باناخ و $x, y \in A$، آنگاه

$$\sigma(xy) \cup \{0\} = \sigma(yx) \cup \{0\}$$

برهان. کافی است A را واحددار در نظر بگیریم. گیریم $\lambda \notin \sigma(xy) \cup \{0\}$ و نشان می‌دهیم $\lambda \notin \sigma(yx) \cup \{0\}$. با تعویض x با $(-\lambda^{-1}x)$ می‌توان فرض کرد که $\lambda = -1$.

توضیح.

$$\begin{aligned}
\lambda \notin \sigma(xy) \cup \{0\} \quad &\Longrightarrow \quad \lambda \neq 0, \ \ \lambda e - xy \in G(A) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \neq 0, \ \ (-1)e - (-\lambda^{-1}x)y \in G(A) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \neq 0, \ \ -1 \notin \sigma((-\lambda^{-1}x)y) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \neq 0, \ \ -1 \notin \sigma(y(-\lambda^{-1}x)) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \neq 0, \ \ (-1)e - (y(-\lambda^{-1}x)) \in G(A) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \neq 0, \ \ \lambda e - yx \in G(A) \\
&\Longrightarrow \quad \lambda \notin \sigma(yx) \cup \{0\}
\end{aligned}$$

$\star$

بنابراین $e+xy \in G(A)$. اکنون داریم

$$(e+yx)^{-1} = e - y(e+xy)^{-1}x$$

توضیح.

$$\begin{aligned}[e-y(e+xy)^{-1}x](e+yx) &= e+yx-y(e+xy)^{-1}x-y(e+xy)^{-1}xyx \\ &= e+yx-y(e+xy)^{-1}(e+xy)x = e\end{aligned}$$

به طریق مشابه داریم

$$(e+yx)[e-y(e+xy)^{-1}x] = e$$

$\star$

و لذا $-1 \notin \sigma(yx) \cup \{0\}$ و بنابراین ثابت کردیم که

$$\sigma(yx) \cup \{0\} \subseteq \sigma(xy) \cup \{0\}$$

با توجه به متقارن بودن رابطه نسبت به x و y رابطه‌ی احتوای عکس نیز برقرار بوده و حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۷.۲.۳ اگر $A \in BC_e$ و $x_1, \cdots, x_n \in A$، آنگاه

$$\sigma_A(x_1,\cdots,x_n) = \Big\{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \mathbb{C}^n : \ \forall\, y_1,\cdots,y_n \in A, \ \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i-\lambda_i e) \notin G(A)\Big\} \qquad (۱)$$

برهان. گیریم $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) \in \sigma_A(x_1,\cdots,x_n)$. پس $f \in \mathfrak{M}(A)$ هست که

$$(\lambda_1,\cdots,\lambda_n) = (f(x_1),\cdots,f(x_n))$$

بنابراین به ازای هر $y_1,\cdots,y_n$،

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i-\lambda_i e)\Big) = \sum_{i=1}^{n} f(y_i)[f(x_i)-\lambda_i] = 0$$

و لذا $\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i-\lambda_i e) \notin G(A)$؛ یعنی $\subseteq$ برقرار است. برای اثبات $\supseteq$ گیریم $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ عضوی از مجموعه‌ی سمت راست (۱) باشد. در این صورت

$$I = \Big\{\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i-\lambda_i e) \ \ ; \ \ y_1,\cdots,y_n \in A\Big\}$$

ایده‌آلی از A و بدون عضو معکوس پذیر است و لذا در یک ایده‌آل ماکسیمال مانند M_0 قرار دارد. گیریم M_0 هسته‌ی $f_0 \in \mathfrak{M}(A)$ باشد. داریم

$$0 = f_0\Big(\sum_{i=1}^{n} y_i(x_i - \lambda_i e)\Big) = \sum_{i=1}^{n} f_0(y_i)[f_0(x_i) - \lambda_i] \qquad (y_1, \cdots, y_n \in A)$$

بنابراین به ازای هر $1 \leq j \leq n$ با اختیار $y_i = \delta_{ij} e \ \ (1 \leq i \leq n)$، داریم $\lambda_j = f_0(x_j)$ و لذا

$$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (f_0(x_1), \cdots, f_0(x_n)) \in \sigma_A(x_1, \cdots, x_n)$$

بنابراین (۱) برقرار است. $\square$

تبصره: هر مجموعه‌ی فشرده $K \subseteq \mathbb{C}^n$ طیف توأم دسته‌ای از عناصر در جبر باناخ A است. در واقع اگر $A = C(K)$ و

$$x_i(\lambda) = \lambda_i \qquad (\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K)$$

توابع مؤلفه‌ای روی K باشند، آنگاه بنا به مطالب گذشته $\mathfrak{M}(A) = K$ (در واقع $\mathfrak{M}(A) = \{f_\lambda \ : \ \lambda \in K\}$ که در آن $f_\lambda(x) = x(\lambda) \quad (x \in C(K))$ می‌باشد) و

$$\begin{aligned} \sigma_A(x_1, \cdots, x_n) &= \Big\{(\hat{x_1}(\overset{f_\lambda}{\overset{\uparrow}{\lambda}}), \cdots, \hat{x_n}(\lambda)) \ : \ \lambda \in K\Big\} \\ &= \{(x_1(\lambda), \cdots, , x_n(\lambda)) \ : \ \lambda \in K\} \\ &= \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \ : \ \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K\} = K \end{aligned}$$

قابل ذکر است که اگر $int\ K \neq \phi$ آنگاه $A = C(K)$ بوسیله‌ی توابع مؤلفه‌ای $x_1, \cdots, x_n$ تولید نمی‌شوند. در حقیقت جبر تولید شده به وسیله‌ی $x_n, \cdots, x_1$ از کلیه‌ی توابع هولومورفیک (تحلیلی) در درون K و (پیوسته بر K) تشکیل می‌شود.

تعریف ۸.۲.۳ گیریم K زیر مجموعه‌ای فشرده و ناتهی از $\mathbb{C}^n$ باشد. غلاف محدب چندجمله‌ای K عبارت است از

$$P(K) = \bigcap_W \Big\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ |W(\lambda)| \leq \max_{\mu \in K} |W(\mu)|\Big\}$$

که در آن مقطع روی کلیه‌ی چند جمله‌ایهای مختلط W گرفته می‌شود.

واضح است که $K \subseteq P(K)$ و $P(K)$ فشرده است. از آنجا که

$$\left\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ |W(\lambda)| = 0\right\} = \bigcap_{K=1}^{\infty} \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ |W(\lambda) + \frac{1}{k}| \leq \frac{1}{k}\right\}$$

می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} P(K) &= \bigcap_{\max_{\mu \in K} |W(\mu)| > 0} \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ |W(\lambda)| \leq \max_{\mu \in K} |W(\mu)|\right\} \\ &= \bigcap_{\max_{\mu \in K} |W(\mu)| > 0} \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ \left|\frac{W}{(\max_{\mu \in K} |W(\mu)|)}(\lambda)\right| \leq 1\right\} \\ &= \bigcap_{\max_{\mu \in K} |W(\mu)| = 1} \left\{\lambda \in \mathbb{C}^n \ : \ |W(\lambda)| \leq 1\right\} \end{aligned}$$

تعریف ۹.۲.۳ زیر مجموعه‌ی فشرده $K \subseteq \mathbb{C}^n$ را محدب چندجمله‌ای [۱] گوییم هرگاه $K = P(K)$.

قضیه ۱۰.۲.۳ اگر $A \in BC_e$ به وسیله‌ی عناصر $x_1, \cdots, x_n$ تولید شود، آنگاه $\sigma_A(x_1, \cdots, x_n)$ محدب چندجمله‌ای است. بالعکس هر زیر مجموعه‌ی محدب چندجمله‌ای از $\mathbb{C}^n$ طیف توأم دسته‌ای از مولدها در یک جبر باناخ است.

برهان. اگر $A = [x_1, \cdots, x_n]$، آنگاه با توجه به قضیهٔ (۸.۳.۲) داریم $\sigma(x_1, \cdots, x_n) = \mathfrak{M}(A)$ (در واقع، $(f(x_1), \cdots, f(x_n)) \longrightarrow f$ یک همومورفیسم از $\mathfrak{M}(A)$ بروی $\sigma(x_1, \cdots, x_n)$ است). گیریم $K = \sigma(x_1, \cdots, x_n)$ و $\lambda_0 = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in P(K)$. به ازای هر چندجمله‌ای n متغیرهٔ مختلط W داریم $|W(\lambda_0)| \leq \max_{\mu \in K} |W(\mu)|$، که با قرار دادن

$$f_0(y_W) = W(\lambda_0), \qquad y_W = W(x_1, \cdots, x_n)$$

f_0 یک تابعک خطی – ضربی روی زیر جبر متشکل از کلیه‌ی y_W ها بوده و از آنجا که

$$\begin{aligned} |f_0(y_W)| &= |W(\lambda_0)| \leq \max_{\mu \in K} |W(\mu)| = \max_{f \in \mathfrak{M}} |W(f(x_1), \cdots, f(x_n))| \\ &= \max_{f \in \mathfrak{M}} |f(W(x_1, \cdots, x_n)| = \rho(W(x_1, \cdots, x_n)) \\ &\leq ||W(x_1, \cdots, x_n)|| = ||y_W|| \end{aligned}$$

---
[۱] Polynomially Convex

f_0 پیوسته است. حال از آنجا که y_Wها در A چگال هستند f_0 را می‌توان به عضوی از $\mathfrak{M}(A)$ توسیع داد. بنابراین $K = \sigma(x_1, \cdots, x_n) \ni \lambda_0$ (اگر $u_i(z) = z_i \; (1 \leq i \leq n)$ (u_i چندجمله‌ای) $z = (z_1, \cdots, z_n)$ توابع (چندجمله‌ای‌های) مؤلفه‌ای باشند آنگاه

$$(\lambda_0 = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = (f_0(y_{u_1}), \cdots, f_0(y_{u_n})) = (f_0(x_1), \cdots, f_0(x_n)) \in \sigma(x_1, \cdots, x_n)$$

بالعکس: گیریم $K = P(K)$ که در آن K زیر مجموعه‌ای فشرده از $\mathbb{R}^n$ است. گیریم A تتمیم جبر نرمدار کلیهٔ چندجمله‌ایهای n متغیره‌ی W بر $\mathbb{R}^n$ با نرم

$$||W|| = \max_{\lambda \in K} |W(\lambda)|$$

باشد. هر $\lambda \in K$ یک تابعک خطی — ضربی پیوسته f_λ بر جبر کلیهٔ چندجمله‌ایها با ضابطهٔ $f_\lambda(W) = W(\lambda)$ تعریف می‌کند. ($|f_\lambda(W)| = |W(\lambda)| \leq \|W\|$) که با توجه به چگال بودن چندجمله‌ایها در A می‌توان آن رابه طور پیوسته به عضوی از $\mathfrak{M}(A)$ توسیع داد. از طرف دیگر اگر $f \in \mathfrak{M}(A)$ آنگاه با قرار دادن $\mu = (\mu_1, \cdots, \mu_n)$ که در آن $\mu_i = f(W_i)$ و $(\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda) \in \mathbb{R}^n) \quad W_i(\lambda) = \lambda_i$ چندجمله‌ایهای مؤلفه‌ای می‌باشند، برای هر چندجمله‌ای W داریم $f(W) = W(\mu)$.

توضیح.

$$W = \sum_{\text{متناهی}} a_{i_1 \cdots i_n} W_1^{i_1} \cdots W_n^{i_n} \qquad a_{i_1, \cdots, i_n} \in \mathbb{C}, \;\; i_1, \cdots, i_n \geq 0$$

$$f(W) = \sum_{\text{متناهی}} a_{i_1 \cdots i_n} [f(W_1)]^{i_1} \cdots [f(W_n)]^{i_n} = \sum_{\text{متناهی}} a_{i_1 \cdots i_n} \mu_1^{i_1} \cdots \mu_n^{i_n} = W(\mu_1, \cdots, \mu_n) = W(\mu)$$

$\star$

نقطه‌ی μ به $K = P(K)$ متعلق است زیرا در غیر این صورت چندجمله‌ای W هست که $|W(\mu)| > \|W\|$. با تعویض W با مضرب مناسبی از آن می‌توان فرض کرد که $|W(\mu)| > 1 > \|W\|$.

$$\left(\exists \, \alpha \in \mathbb{R} \;\; ; \;\; |W(\mu)| > \alpha > \|W\| \Longrightarrow \left|\frac{W}{\alpha}(\mu)\right| > 1 > \left|\left|\frac{W}{\alpha}\right|\right|\right)$$

بنابراین $W^m \to 0$ ولی $|f(W^m)| = |f(W)|^m = |W(\mu)|^m \longrightarrow \infty$ که این متناقض با پیوستگی f است. اکنون به ازای هر $W \in A$ با توجه به پیوستگی f و چگال بودن چندجمله‌ایها در A داریم $f(W) = W(\mu)$.

توضیح.

$$\exists (P_K) \subseteq A \;\; ; \;\; ||P_K - W|| \longrightarrow 0 \Longrightarrow f(P_K) \longrightarrow f(W),$$

$$|P_K(\mu) - W(\mu)| \leq ||P_K - W|| \longrightarrow 0$$

$\star$

بنابراین $K = \mathfrak{M}(A)$ (در واقع $\mathfrak{M}(A) = \{f_\lambda \;\; ; \;\; \lambda \in K\}$). واضح است که جبر A بوسیله‌ی n چندجمله‌ای مؤلفه‌ای $W_i \quad (1 \leq i \leq n)$ تولید می‌شود و داریم

$$\begin{aligned}
\sigma(W_1, \cdots, W_n) &= \{(f_\lambda(W_1), \cdots, f_\lambda(W_n)) \;\;:\;\; \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K\} \\
&= \{(W_1(\lambda), \cdots, W_n(\lambda)) \;\;:\;\; \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K\} \\
&= \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \;\;:\;\; \lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in K\} = K
\end{aligned}$$

$\square$

۳.۳ معادل سازی ایده‌آلهای ماکسیمال در جبرهای باناخ جابجایی و یکدار

قضیه ۱.۳.۳ گیریم $A \in BC_e$. تابعک خطی f بر A متعلق به $\mathfrak{M}(A)$ است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in A$، $f(x) \in \sigma(x)$.

برهان. اگر $f \in \mathfrak{M}(A)$ باشد آنگاه به وضوح به ازای هر $x \in A$، $f(x) \in \sigma(x)$.

بالعکس، گیریم به ازای هر $x \in A$، $f(x) \in \sigma(x)$. پس داریم $f(e) \in \sigma(e) = \{1\}$ یا $f(e) = 1$، و همچنین $|f(x)| \leq \rho(x) \leq ||x|| \quad (x \in A)$، یعنی f کراندار است.

گیریم $x \in A$ دلخواه و ثابت باشد. قرار می‌دهیم

$$\varphi(\lambda) = f(exp(\lambda x)) \qquad\qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

به وضوح φ یک تابع تام است.

توضیح. داریم

$$\begin{aligned}
\varphi'(\lambda_0) &= \lim_{\lambda \to \lambda_0} f\left(\frac{\exp(\lambda x) - \exp(\lambda_0 x)}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= f\left(\lim_{\lambda \to \lambda_0} \exp(\lambda_0 x) \frac{\exp(\lambda - \lambda_0)x - e}{\lambda - \lambda_0}\right) \\
&= f\left(\exp(\lambda_0 x) \lim_{\lambda \to \lambda_0} \Sigma_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda - \lambda_0)^{n-1} x^n}{n!}\right) = f(x \cdot \exp(\lambda_0 x))
\end{aligned}$$

$\star$

زیرا از آنجا که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda - \lambda_0|^{n-1} ||x||^n}{n!} = \|x\| \exp(|\lambda - \lambda_0| \|x\|) < \infty$$

سری $\Sigma_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_0)^{n-1}x^n}{n!}$ همگرای یکنواخت بوده و می‌توان جمله به جمله از آن حد گرفت.

چون به ازای هر λ، $f(\exp(\lambda x))\in\sigma(\exp(\lambda x))$ و $0\notin\exp(\lambda x)$، داریم $\varphi(\lambda)\neq 0$.

بنابراین

$$\varphi(\lambda)=\exp[\psi(\lambda)]$$

که در آن $\psi(\lambda)$ یک تابع تام است (چرا؟). بعلاوه چون

$$\|\exp[\psi(\lambda)]\|=\|\varphi(\lambda)\| \quad\leq\quad \|f\|\left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n x^n}{n!}\right\|\leq\|f\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\lambda|^n\|x\|^n}{n!}=\|f\|\exp(|\lambda|\|x\|)$$

بنا به قضیه‌ی کلاسیک هادامارد، $\psi(\lambda)=\alpha+\beta\lambda$ یک چند جمله‌ای درجه‌ی یک می‌باشد. بنابراین $\varphi(\lambda)=\exp(\alpha)\cdot\exp(\beta\lambda)$، که با قرار دادن $\lambda=0$ خواهیم داشت $\exp\alpha=1$، و لذا $\varphi(\lambda)=\exp(\beta\lambda)$، و یا

$$\varphi(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta^n}{n!}\lambda^n \tag{۱}$$

از طرف دیگر، بنا به تعریف $\varphi(\lambda)$ داریم

$$\varphi(\lambda)=f\left(\Sigma_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n x^n}{n!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(x^n)}{n!}\lambda^n \tag{۲}$$

با مقایسه‌ی (۱) و (۲) داریم $f(x^n)=\beta^n$ و بالاخص $f(x^2)=\beta^2=[f(x)]^2$. بنابراین، ثابت نمودیم که

$$f(x^2)=[f(x)]^2 \qquad\qquad (x\in A)$$

اکنون

$$\begin{aligned} f(xy) &= f\left(\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-x^2-y^2\right]\right)=\frac{1}{2}\left[f(x+y)^2-f(x)^2-f(y)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(f(x)+f(y)^2-f(x)^2-f(y)^2\right]=f(x)f(y) \end{aligned}$$

و لذا $f\in\mathfrak{M}(A)$. □

نتیجه ۲.۳.۳ گیریم $A\in BC_e$ و $X\subseteq A$ زیر فضایی با همبعد ۱ باشد. در این صورت X یک ایده‌آل ماکسیمال در A است اگر و فقط اگر از عناصر معکوس ناپذیر تشکیل شده باشد.

برهان. $(\Leftarrow)$: بدیهی است.

$(\Rightarrow)$: $X \cap G(A) = \varnothing$ و $G(A)$ باز است، لذا $\overline{X} \cap G(A) = \phi$. حال چون $\frac{\overline{X}}{X} \subseteq \frac{A}{X}$، $\dim \frac{A}{X} = 1$ و $\overline{X} \neq A$، داریم $\dim \frac{\overline{X}}{X} = 0$، یا $\overline{X} = X$. پس X بسته است. حال چون $e \notin X$، بنا به نتایج قضیه‌ی هان ـ باناخ $f \in A'$ هست که $f(e) = 1$ و به ازای هر $x \in X$، $f(x) = 0$. چون $X \subseteq Ker\ f$ داریم $\dim \frac{Ker\ f}{X} \leq \dim \frac{A}{X} = 1$. حال چون $Ker\ f \neq A$، داریم $\dim \frac{Ker\ f}{X} = 0$ یا $X = Ker\ f$. به ازای هر $x \in A$، چون $f(x - f(x)e) = 0$ داریم $x - f(x)e \in Ker\ f = X$، و لذا $x - f(x)e \notin G(A)$ یا $f(x) \in \sigma(x)$. بنابراین بنا به قضیه‌ی (۱.۳.۳) $f \in \mathfrak{M}(A)$ و در نتیجه $X = Ker\ f$ یک ایده‌آل ماکسیمال است. $\square$

تبصره: قضیه‌ی قبل برای جبرهای باناخ حقیقی بر قرار نیست، مثلاً با در نظر گرفتن $A = C[0,1]$ و

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dt \qquad (x \in A)$$

به ازای هر x داریم

$$f(x) = \int_0^1 x(t)dt = x(\xi) \implies (x - f(x)\cdot 1)(\xi) = x(\xi) - f(x) = 0$$
$$\implies x - f(x)\cdot 1 \notin G(A) \implies f(x) \in \sigma(x)$$

ولی اگر مثلاً $x_1(t) = t$ و $x_2(t) = t^2$ $(0 \leq t \leq 1)$ آنگاه

$$f(x_1x_2) = \int_0^1 x_1(t)x_2(t)dt = \int_0^1 t^3dt = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \int_0^1 tdt \int_0^1 t^2dt = f(x_1)f(x_2)$$

نتیجه ۳.۳.۳ گیریم Ω یک فضای هاسدورف فشرده، A زیر جبری از $C(\Omega)$ حاوی توابع ثابت (حاوی تابع یک) و μ یک اندازه‌ی بورل مختلط بر Ω باشد به طوریکه به ازای هر $x \in A$، نقطه‌ای مانند $P_x \in \Omega$ باشد که

$$\int_\Omega xd\mu = x(P_x) \qquad (\text{خاصیت مقدار میانی})$$

در این صورت μ نسبت به A ضربی است؛ یعنی

$$\int_\Omega xyd\mu = \int_\Omega xd\mu \cdot \int_\Omega yd\mu \qquad (x, y \in A) \qquad (۱)$$

برهان. $\square$

گیریم $\overline{A}$ بستار A در $C(\Omega)$ باشد، و لذا $\overline{A} \in BC_e$. به وضوح

$$f(x) = \int_\Omega x d\mu \qquad (x \in \overline{A})$$

یک تابعک خطی محدود بر $\overline{A}$ است.

توضیح. به ازای هر x،

$$|f(x)| = \left|\int_\Omega x d\mu\right| \leq \int_\Omega |x| d|\mu| \leq \|x\|_\infty \cdot |\mu|(\Omega)$$

$\star$

گیریم $x \in \overline{A}$ دلخواه باشد.دنباله‌ی $(x_n) \subseteq A$ هست که $x_n \longrightarrow x$. قرار می‌دهیم $P_n = P_{x_n}$ (در واقع $f(x_n) = \int_\Omega x_n d\mu = x_n(P_n)$). داریم

$$\begin{aligned} |x(P_n) - f(x)| &\leq |x(P_n) - x_n(P_n)| + |f(x_n) - f(x)| \\ &\leq \|x - x_n\|_\infty + \|f\| \cdot \|x_n - x\|_\infty \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty) \end{aligned}$$

و یا $f(x) = \lim_{n\to\infty} x(P_n)$. چون Ω فشرده است (P_n) دارای زیر دنباله‌ای همگرا مانند $(P_{n_k})_k$ به عضوی مانند $P_x \in \Omega$ است. پس $f(x) = \lim_{k\longrightarrow\infty} x(P_{n_k}) = x(P_x)$ زیرا x پیوسته است. بنابراین $(x - f(x) \cdot 1)(P_x) = x(P_x) - f(x) = 0$، و لذا $f(x) \in \sigma(x)$. اکنون با توجه به قضیهٔ (۱.۳.۳) داریم $f \in \mathfrak{M}(\overline{A})$ و لذا (۱) بر قرار است.

اکنون قضیه‌ی (۱.۳.۳) را به جبرهای نیم ساده تعمیم می‌دهیم.

قضیه ۴.۳.۳ گیریم $A_1, A_2 \in BC_e$ و A_2 نیم ساده باشد. حال اگر $T : A_1 \longrightarrow A_2$ یک نگاشت خطی باشد بطوری که به ازای هر $x \in A_1$،

$$\sigma(Tx) \subseteq \sigma(x)$$

آنگاه T ضربی است؛ یعنی

$$T(xy) = T(x)T(y) \qquad (x, y \in A_1)$$

برهان. گیریم $f \in \mathfrak{M}(A_2)$ دلخواه باشد. قرار می‌دهیم

$$F(x) = f(Tx) \qquad (x \in A_1)$$

F به وضوح خطی است که با توجه به $F(x) \in \sigma(Tx) \subseteq \sigma(x)$ $(x \in A_1)$ از قضیه‌ی (۱.۳.۳) نتیجه می‌شود که $F \in \mathfrak{M}(A_1)$. پس همواره

$$f(Txy) = F(xy) = F(x)F(y) = f(Tx)f(Ty) = f\big((Tx)(Ty)\big)$$

حال چون $f \in \mathfrak{M}(A_2)$ دلخواه و A_2 نیم ساده است داریم

$$Txy - TxTy \in radA_2 = \{0\} \qquad (x, y \in A_1)$$

و یا $Txy = TxTy \quad (x, y \in A_1)$.

عکس قضیه‌ی (۴.۳.۳) نیز برقرار است هرگاه T واحد A_1 را به واحد A_2 تصویر کند. $\square$

قضیه ۵.۳.۳ گیریم $A_1, A_2 \in BC_e$ و e_1 و e_2 به ترتیب واحدهای A_1 و A_2 باشند. حال اگر T یک نگاشت خطی از A_1 به A_2 باشد که $Te_1 = e_2$ و همواره $Txy = TxTy$، آنگاه به ازای هر $x \in A_1$، $\sigma(Tx) \subseteq \sigma(x)$.

برهان. داریم

$$e_2 = Te_1 = Txx^{-1} = TxTx^{-1} \qquad (x \in G(A_1))$$

بنابراین اگر $x \in G(A_1)$، آنگاه $Tx \in G(A_2)$. بنابراین

$$\begin{aligned} \lambda \notin \sigma(x) \quad &\Longrightarrow \quad x - \lambda e_1 \in G(A_1) \\ &\Longrightarrow \quad Tx - \lambda e_2 = T(x - \lambda e_1) \in G(A_2) \Longrightarrow \lambda \notin \sigma(T(x)) \end{aligned}$$

یا $\sigma(Tx) \subseteq \sigma(x) \quad (x \in A_1)$ و حکم ثابت است. $\square$

اکنون حالت غیر جابجایی را در نظر می‌گیریم و ابتدا لم زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۶.۳.۳ گیریم A یک جبر حقیقی یا مختلط (بدون نرم) با واحد e باشد. حال اگر f یک تابعک خطی بر A بوده به طوری که

$$f(e) = 1 \tag{۱}$$

$$f(x^2) = f(x)^2 \qquad (x \in A) \tag{۲}$$

آنگاه f بر A ضربی است؛ یعنی $f(xy) = f(x)f(y)$ برای هر $x, y \in A$.

برهان. داریم

$$f\left[(x+y)^2\right] = [f(x)+f(y)]^2$$

و لذا

$$f(xy+yx) = 2f(x)f(y) \qquad (x,y\in A) \tag{۳}$$

قرار می‌دهیم

$$x\Box\, y = \frac{1}{2}(xy+yx)$$

پس

$$f(x\Box\, y) = f(x)f(y)$$

و لذا

$$f\big((x\Box\, y)\Box\, z\big) = f(x\Box\, y)f(z) = f(x)f(y)f(z)$$

که معادل است با

$$f(xyz+yxz+zxy+zyx) = 4f(x)f(y)f(z) \qquad (x,y,z\in A) \tag{۴}$$

همچنین

$$f\big(y\Box\, (z\Box\, x)\big) - (y\Box\, z)\Box\, x) = 0$$

که معادل است با

$$f(xyz+zyx) = f(zxy+yxz) \qquad (x,y,z\in A) \tag{۵}$$

از (۴) و (۵) داریم

$$f(xyz+zyx) = 2f(x)f(y)f(z)$$

که با قرار دادن $x=z$ داریم

$$f(xyx) = f(x)^2\cdot f(y) \qquad (x,y\in A) \tag{٦}$$

می‌خواهیم نشان دهیم که

$$f(xy) = f(yx) \qquad (x,y\in A) \tag{۷}$$

(فرض خلف) $x_0, y_0 \in A$ باشند به طوری که

$$f(x_0y_0 - y_0x_0) = C \neq 0$$

با تعویض y_0 با $\frac{y_0}{C}$، می‌توان فرض کرد که

$$f(x_0y_0 - y_0x_0) = 1 \tag{۸}$$

همچنین واضح است که رابطه‌ی فوق با تغییر x_0 با $x_0 + \alpha e$ نیز که α یک اسکالر دلخواه است برقرار است. بنابراین می‌توان فرض کرد که

$$f(x_0) = 0 \tag{۹}$$

(x_0 را با $x_0 - f(x_0)e$ تعویض کنید). اکنون از (۳) و (۹) داریم

$$f(x_0y_0) + f(y_0x_0) = 0$$

که با توجه به (۸)، خواهیم داشت

$$f(x_0y_0) = \frac{1}{2} \quad , \quad f(y_0x_0) = -\frac{1}{2} \tag{۱۰}$$

از طرف دیگر بنا به (۲) و (۶) و (۸) و (۹) و (۱۰) داریم

$$\begin{aligned} 1 &= f\left[(x_0y_0 - y_0x_0)^2)\right] = f\left[(x_0y_0)^2 + (y_0x_0)^2 - x_0y_0^2x_0 - y_0x_0^2y_0\right] \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 2f(x_0)^2f(y_0)^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

که این یک تناقض است. پس (۷) برقرار بوده که با توجه به (۳) خواهیم داشت

$$f(xy) = f(x)f(y)$$

□

نتیجه ۷.۳.۳ اگر A یک جبر حقیقی یا مختلط بدون واحد و f یک تابعک خطی بر A باشد که همواره $f(x^2) = f(x)^2$، آنگاه f ضربی است.

برهان. قرار دهید $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ و f را بر A_1 با ضابطه‌ی

$$f_1(x + \lambda e) = f(x) + \lambda$$

توسیع دهید

$$\left(f_1\left[(x+\lambda e)^2\right]=f_1(x^2+2\lambda x+\lambda^2 e)=f(x)^2+2\lambda f(x)+\lambda^2=f_1(x+\lambda e)^2\right)$$

□

قضیه ۸.۳.۳ گیریم A یک جبر باناخ مختلط باشد. در این صورت تابعک خطی f بر A ضربی است اگر و تنها اگر

$$f(x)\in\sigma(x) \qquad (x\in A)$$

برهان. کافی است A را واحددار بگیریم (اگر A واحددار نباشد f را بر $A_1=A\oplus\{\lambda e\}$ به صورت $f_1(x+\lambda e)=f(x)+\lambda$ توسیع دهید و رابطه‌ی $\sigma(x+\lambda e)=\sigma(x)+\lambda$ را در نظر بگیرید).

ابتدا فرض می‌کنیم f بر A ضربی باشد. گیریم $x\in A$ دلخواه و A_0 زیر جبر جابجایی ماکسیمال حاوی x و e باشد. چون $f(e)\in\sigma(e)=\{1\}$ داریم $f(e)=1$. بنابراین $f|_{A_0}\in\mathfrak{M}(A_0)$ و با توجه به قضایای قبل

$$f(x)\in(f|_{A_0})(x)\in\sigma_{A_0}(x)=\sigma_A(x)$$

بالعکس، فرض کنیم به ازای هر $x\in A$، $f(x)\in\sigma(x)$. گیریم A_0 زیر جبر جابجایی ماکسیمال حاوی x و e باشد. $f|_{A_0}$ خطی است و

$$(f|_{A_0})(y)=f(y)\in\sigma_A(y)=\sigma_{A_0}(y) \qquad (y\in A)$$

و بنابراین $f|_{A_0}\in\mathfrak{M}(A_0)$. پس

$$f(x^2)=(f|_{A_0})\left(x^2\right)=\left(f|_A(x)\right)^2=f(x)^2$$

حال چون $x\in A$ دلخواه است بنا به لم (۶.۳.۳) f یک تابعک خطی – ضربی بر A است. □

نتیجه ۹.۳.۳ گیریم $A\in B_e$ (یک جبر باناخ واحددار) باشد. زیرفضای $X\subseteq A$ با $CodimX=1$ یک ایده‌ال دو طرفه‌ی ماکسیمال در A است اگر و تنها اگر X از عناصر معکوس ناپذیر تشکیل شده باشد.

برهان. $(\Leftarrow)$: بدیهی است.

$(\Rightarrow)$: به مانند حالت جابجایی داریم $X = Kerf$ که در آن f یک تابعک خطی بر A است که به ازای هر $x \in A$، $f(x) \in \sigma(x)$، و لذا f ضربی است. پس X یک ایده‌آل دو طرفه‌ی A است که با توجه به $CodimX = 1$، X یک ایده‌آل ماکسیمال دو طرفه است

$$\Big(X \subseteq \overset{\overset{\text{ایده‌آل دوطرفه}}{\uparrow}}{Y} \subseteq A \;\Rightarrow\; \dim\frac{Y}{X} \leq \dim\frac{A}{X} = 1 \;\Rightarrow\; \dim\frac{Y}{X} = 0 \text{ یا } 1 \;\Rightarrow\; Y = X \text{ یا } Y = A\Big)$$

$\square$

تمرین (قضیه‌ی هادامارد): اگر f تابعی تام، $f(0) = 1$، $f'(0) = 0$ و $0 < |f(\lambda)| \leq e^{|\lambda|}$، آنگاه $f(\lambda) \equiv 1$.

فصل چهارم

جبرهای اینولوشن‌دار

۱.۴ مقدمات

جبرهای اینولوشن‌دار شاخهٔ مهمی از جبرهای باناخ است که دارای کاربردهای زیادی می‌باشد.

در این فصل ما جبرهای B^* $(=C^*)$ و نظریهٔ نمایش جبرهای اینولوشن‌دار را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

تعریف ۱.۱.۴ گیریم A یک جبر باناخ باشد. نگاشت $x \longrightarrow x^*$ از A بتوی (بروی) A را یک اینولوشن گویند هرگاه به‌ازای هر $x, y \in A$ و هر اسکالر α،

(۱) $(x^*)^* = x$،

(۲) $(x+y)^* = x^* + y^*$،

(۳) $(xy)^* = y^* x^*$،

(۴) $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$.

در این‌حالت A را یک $*-$جبر می‌گویند. همومورفیسم h از $*-$جبر A_1 بتوی $*-$جبر A_2 را یک $*-$هومومورفیسم گویند هرگاه $h(x^*) = h(x)^*$ برای هر $x \in A_1$.

مثال‌ها

(۱) $A = C(\Omega)$ که در آن Ω یک فضای هاسدورف است و $x^*(t) = \overline{x(t)}$.

(۲) $A = C[0,1]$، $x^*(t) = \overline{x(1-t)}$ $\quad (0 \le t \le 1)$

(۳) $A = \mathcal{A}$ که در آن $\mathcal{A}$ جبر کلیهٔ توابع هولومورفیک بر $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ و پیوسته بر بستارش با نرم سوپریموم و اینولوشن $x^*(z) = \overline{x(\bar{z})}$ $(|z| \le 1)$ می‌باشد.

$$\left((x^*)'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{x(\bar{z})} - \overline{x(\bar{z_0})}}{z - z_0} = \overline{\left(\lim_{z \to z_0} \frac{x(\bar{z}) - x(\bar{z_0})}{\bar{z} - \bar{z}_0} \right)} = \overline{x'(\bar{z_0})} \right)$$

(۴) $A = L_1(-\infty, \infty)$ با $f^*(t) = \overline{f(-t)}$ $(-\infty < t < \infty)$.

توضیح.

$$\begin{aligned}(f*g)^*(t) &= \overline{(f*g)(-t)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-t-x)g(x)dx} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-t+x)g(-x)dx} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(-t+x)\bar{g}(-x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t-x)g^*(x)dx = (f^* * g^*)(t)\end{aligned}$$

$\star$

(۵) $A = l_1(-\infty, \infty)$ و $x^*(n) = \overline{x(-n)}$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$، یا با گذار به تبدیل گلفاند

$$(x^*)\widehat{\ }(z) = \overline{\hat{x}(z)} \quad (|z| = 1)$$

توضیح:

$$\begin{aligned}(x*y)^*(n) &= \overline{(x*y)(-n)} = \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-n-k)y(k)} = \overline{\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(-n+k)y(-k)} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{x}(-n+k)\bar{y}(-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x^*(n-k)y^*(k) = (x^* * y^*)(n) \qquad *\end{aligned}$$

هر تابعک خطی ضربی بر $l_1(-\infty, \infty)$ به‌صورت $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{int}$ می‌باشد که در آن $0 \le t < 2\pi$. بنابراین با قرار دادن $z = e^{it}$ داریم $f(x) = f_z(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n z^n$.

$$\begin{aligned}(x^*)\widehat{\ }(z) &:= (x^*)\widehat{\ }(f_z) = f_z(x^*) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*(n)z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(-n)}z^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)}z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{x(n)}\bar{z}^n = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^n} = \overline{f_z(x)} = \overline{\hat{x}(f_z)} \\ &:= \bar{\hat{x}}(z)\end{aligned}$$

تعریف ۲.۱.۴ زیرجبر A_0 از جبرباناخ اینولوشن‌دار را خودالحاق گوییم هرگاه $A_0^* = A_0$ (به‌طور معادل $A_0^* \subseteq A_0$) یعنی A_0 تحت اینولوشن بسته است. یک زیرجبر خودالحاق را یک $*$−زیرجبر می گوییم.

تعریف ۳.۱.۴ عضو x از $*-$جبر A را نرمال گوییم هرگاه $x^*x = xx^*$. بنابراین عضو $x \in A$ نرمال است اگر و فقط اگر در یک $*-$زیرجبر جابجایی قرار داشته باشد.

توضیح. اگر x نرمال باشد آنگاه

مجموعهٔ کلیهٔ چندجمله‌ای‌ها از x و x^* با جملهٔ ثابت صفر$= [x, x^*] = x \in A_0$ $\star$

تعریف ۴.۱.۴ عضو x از $*-$جبر A را هرمیتی (خودالحاق) گوییم هرگاه $x = x^*$. واضح است که هر عضو هرمیتی نرمال است. بعلاوه هر $x \in A$ به‌صورت منحصربه‌فرد

$$x = a + ib$$

نوشته می‌شود که در آن a و b هرمیتی هستند. درواقع

$$\begin{cases} x = a + ib \\ x^* = a - ib \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{x+x^*}{2} \\ b = \frac{x-x^*}{2i} \end{cases}$$

مجموعهٔ کلیهٔ عناصر هرمیتی A را به H_A نمایش می‌دهیم.

زیرمجموعهٔ $X \subseteq A$ را هرمیتی (خودالحاق) گوییم هرگاه $X^* = \{x^* : x \in X\} = X$ (یا به‌طور معادل $X^* \subseteq X$).

تعریف ۵.۱.۴ عضو p از $*-$جبر A را یک تصویر گوییم هرگاه p هرمیتی بوده و $p^2 = p$.

قضیه ۶.۱.۴ گیریم A یک $*-$جبر با اینولوشن پیوسته باشد. در این‌صورت نرم معادلی بر A موجود است که در شرط

$$\|x^*\| = \|x\|$$

صدق کرده و به‌علاوه اگر A ناصفر و واحددار باشد آنگاه $\|e\| = 1$.

برهان. نرم اولیه را با $|||.|||$ نمایش می‌دهیم و اگر A ناصفر و واحددار باشد بدون آن‌که خللی به کلیت وارد شود فرض می‌کنیم $|||e||| = 1$. اکنون کافی است نرم جدید را به‌صورت $\|x\| = \max(|||x|||, |||x^*|||)$ درنظر

بگیریم. داریم $\|x\| \leq |||x|||$ و چون اینولوشن پیوسته است $C > 0$ ای هست که $|||x^*||| \leq C|||x|||$. بنابراین می‌توان نوشت $\|x\| \leq (C+1)|||x|||$ و لذا $|||.|||$ و $\|.\|$ معادل هستند. به‌وضوح $\|.\|$ زیرضربی است:

توضیح.

$$\begin{aligned}\|xy\| &= \max(|||xy|||, |||\overbrace{(xy)^*}^{y^*x^*}|||) \leq \max(|||x|||.|||y|||, |||y^*|||.|||x^*|||)\\ &\leq \max(|||x|||, |||x^*|||).\max(|||y|||, |||y^*|||) = \|x\|.\|y\|\end{aligned}$$

$\star$

بالاخره، به‌وضوح داریم $\|x^*\| = \|x\|$ و اگر $A \neq 0$ واحددار باشد، از آن‌جا که $e = e^*$، داریم $\|e\| = \max(|||e|||, |||e^*|||) = 1$

$$(e^*x = (x^*e)^* = x^{**} = x\ , \quad xe^* = (ex^*)^* = x^{**} = x \ \Rightarrow\ e^* = e)$$

$\square$

از آنجا که ما فقط $*$—جبرها با اینولوشن پیوسته را در نظر می‌گیریم با توجه به قضیهٔ (۶.۱.۴) بدون که خللی به کلیت وارد شود فرض می‌کنیم که همواره $\|x^*\| = \|x\|$ و اگر A واحددار و ناصفر باشد، $\|e\| = 1$.

می‌توان به راحتی دید که در مثال‌های قبل شرایط قضیهٔ فوق برقرار است.

تعریف ۷.۱.۴ $*$—جبر جابجایی A را متقارن گوییم هرگاه

$$\widehat{(x^*)}(f) = \overline{\hat{x}(f)} \qquad (f \in \mathfrak{M}(A),\ x \in A)$$

به عبارت دیگر در $*$—جبرهای جابجایی متقارن تبدیل گلفاند $A \underset{x \mapsto \hat{x}}{\longrightarrow} C_0(\mathfrak{M})$ یک $*$—هومومورفیسم است، یعنی $\widehat{(x^*)} = \overline{\hat{x}}$.

قضیه ۸.۱.۴ گیریم $A \neq 0$ یک $*$—جبر جابجایی واحددار باشد. در این صورت A متقارن است اگر و فقط اگر به‌ازاء هر $x \in A$، $(e + x^*x)^{-1}$ موجود باشد.

برهان. اگر A متقارن باشد آنگاه به‌ازای هر $x \in A$، داریم

$$\begin{aligned}f(e + x^*x) &= 1 + f(x^*)f(x) = 1 + \widehat{(x^*)}(f).(\hat{x})(f)\\ &= 1 + \overline{\hat{x}(f)}.\hat{x}(f) = 1 + |\hat{x}(f)|^2 > 0 \quad (f \in \mathfrak{M}(A))\end{aligned}$$

و بنابراین $e+x^*x$ معکوس‌پذیر است.

بالعکس فرض کنیم به‌ازای هر $x \in A$، $(e+x^*x)^{-1}$ موجود باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که:

طیف هر عضو هرمیتی $h \in A$ حقیقی است. برای این منظور گیریم $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ دلخواه و $\beta \neq 0$ باشد. داریم

$$\begin{aligned}[h-(\alpha+i\beta)e][h-(\alpha-i\beta)e] &= [(h-\alpha e)-i\beta e][(h-\alpha e)+i\beta e] \\ &= (h-\alpha e)^2+\beta^2 e = \beta^2(e+z^*z)\end{aligned}$$

که در آن $z=(h-\alpha e)/\beta$. بنابراین $h-(\alpha+i\beta)e \notin \sigma(h)$ و لذا $\sigma(h) \subseteq \mathbb{R}$. اکنون گیریم $x \in A$ دلخواه باشد داریم $x=a+ib$ که در آن a و b هرمیتی هستند.

داریم $x^*=a-ib$ و

$$\widehat{(x^*)}(f)=\hat{a}(f)-i\hat{b}(f)=\overline{\widehat{(a+ib)}(f)}=\overline{\hat{x}(f)} \qquad (f \in \mathfrak{M}(A))$$

زیرا $\hat{a}(f)=f(a) \in \sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$ و مشابهاً $\hat{b}(f) \in \mathbb{R}$. پس A متقارن است. $\square$

به کمک این قضیه تعریف متقارن بودن را به $*-$جبرهای غیرجابجایی تعمیم می‌دهیم.

تعریف ۹.۱.۴ $*-$جبر واحددار A را متقارن گوییم هرگاه برای هر $x \in A$، $(e+x^*x)^{-1}$ موجود باشد.

۲.۴ B^*-جبرها و قضیهٔ گلفاند-نیمارک

تعریف ۱.۲.۴ جبر باناخ A به همراه اینولوشن $x \longrightarrow x^*$ را یک B^*-جبر گوییم هرگاه نرم جبری $\|.\|$ سازگار با توپولوژی آن (معادل با نرم داده‌شده) موجود باشد به‌طوری که به‌ازاء هر $x \in A$،

$$\|x^*x\|=\|x\|^2 \qquad (۱)$$

تبصره. چنین نرمی در رابطهٔ $\|x\|=\|x^*\|$ صدق می‌کند، زیرا $\|x\|^2=\|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\|$, لذا $\|x\| \leq \|x^*\|$. بالنتیجه $\|x^*\| \leq \|x^{**}\|=\|x\|$ ، و لذا $\|x\|=\|x^*\|$.

مثال: نشان دهید (۱) معادل است با

$$\|x^*\| = \|x\| \quad , \quad \|x^*x\| = \|x^*\|\|x\| \qquad (۲)$$

برهان. (۱) ⇐ (۲) بنابر تبصرهٔ فوق داریم $\|x^*\| = \|x\|$ ، و لذا $\|x^*x\| = \|x\|^2 = \|x^*\|\|x\|$.

(۲) ⇐ (۱) بدیهی است. □

مثال: نشان دهید (۱) معادل است با

$$\|x^*\| = \|x\| \ , \quad \|x^*x\| \geq \|x^*\|^2 \qquad (۳)$$

برهان. (۱)⇐(۳) بدیهی است.

(۱)⇐(۳)

$$\|x\|^2 \leq \|x^*x\| \leq \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2$$

□

اکنون به‌عنوان یک مثال مهم گیریم $B(H)$ جبر باناخ کلیهٔ عملگرهای خطی و محدود T بر فضای هیلبرت H با نرم عملگری $\|T\| = sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$ باشد. نشان خواهیم داد که $B(H)$ اینولوشنی دارد که آن را به یک B^*- جبر تبدیل می‌کند.

قضیه ۲.۲.۴ اگر $T \in B(H)$ و برای هر $x \in H$، $\langle Tx, x\rangle = 0$، آنگاه $T = 0$.

برهان. چون $\langle T(x+y), x+y\rangle = 0$، داریم

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0 \qquad (x, y \in H) \qquad (۱)$$

حال اگر y را با iy تعویض نماییم خواهیم داشت

$$-i\langle Tx, y\rangle + i\langle Ty, x\rangle = 0 \qquad (x, y \in H)$$

پس

$$-\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = 0 \qquad (۲)$$

که از (۱) و (۲) خواهیم داشت

$$\langle Tx, y\rangle = 0 \qquad (x, y \in H) \tag{۳}$$

بالاخص با اختیار $y = Tx$ در (۳) داریم $\|Tx\|^2 = 0$ و یا $Tx = 0$ برای هر $x \in H$. □

نتیجه ۳.۲.۴ اگر $S, T \in B(H)$ و

$$\langle Sx, x\rangle = \langle Tx, x\rangle \qquad (x \in H)$$

آنگاه $S = T$.

برهان. قضیه را در مورد $S - T$ به‌کار ببرید. □

لازم به ذکر است که قضیهٔ اخیر در حالتی که میدان اسکالر $\mathbb{R}$ باشد برقرار نیست. برای این منظور کافی است T را دوران به اندازهٔ $\pi/2$ در $\mathbb{R}^2$ درنظر بگیریم.

قضیه ۴.۲.۴ اگر نرم $f : H \times H \longrightarrow \mathbb{C}$ نسبت به مولفهٔ اول خطی و نسبت به مولفهٔ دوم مزدوج خطی [۱] بوده و به مفهوم زیر

$$M = \sup\{|f(x, y)| : \|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1\} < \infty \tag{۱}$$

محدود باشد آنگاه عملگر منحصربه‌فرد $S \in B(H)$ هست که

$$f(x, y) = \langle x, Sy\rangle \qquad (x, y \in H) \tag{۲}$$

به‌علاوه $\|S\| = M$.

برهان. چون $|f(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$، به‌ازاء هر $y \in H$ نگاشت

$$x \longrightarrow f(x, y)$$

یک تابعک خطی محدود بر H با نرم حداکثر $M\|y\|$ است. پس باتوجه به قضیهٔ ریس—فیشر به‌ازاء هر $y \in H$ عضو منحصربه‌فرد $Sy \in H$ هست که (۲) برقرار است؛ بعلاوه $\|Sy\| \leq M\|y\|$. واضح است که $S : H \longrightarrow H$

---
[۱] Sequilinear

جمعی است.

توضیح. به‌ازاء هر $x, y_1, y_2 \in H$ داریم:

$$\langle x, Sy_1\rangle + \langle x, Sy_2\rangle = f(x, y_1) + f(x, y_2) = f(x, y_1 + y_2) = \langle x, S(y_1 + y_2)\rangle$$

و یا

$$\langle x, Sy_1 + Sy_2\rangle = \langle x, S(y_1 + y_2)\rangle$$

$\star$

اگر $\alpha \in \mathbb{C}$، آنگاه

$$\langle x, S(\alpha y)\rangle = f(x, \alpha y) = \bar{\alpha} f(x, y) = \bar{\alpha}\langle x, Sy\rangle = \langle x, \alpha Sy\rangle \qquad (x, y \in H)$$

و لذا $S(\alpha y) = \alpha S(y)$. پس S خطی است. بنابراین $S \in B(H)$ و $M \leq \|S\|$. اما

$$|f(x, y)| = |\langle x, Sy\rangle| \leq \|x\|.\|Sy\| \leq \|x\|\|S\|\|y\| \leq \|S\| \qquad (\|x\|, \|y\| \leq 1)$$

پس $M \leq \|S\|$ و حکم ثابت است. $\square$

تعریف ۵.۲.۴ گیریم H یک فضای هیلبرت و $T \in B(H)$ باشد. $\langle Tx, y\rangle$ نسبت به x خطی و نسبت به y مزدوج خطی بوده و به مفهوم فوق محدود می‌باشد. پس بنابه قضیهٔ اخیر عضو منحصربه‌فرد $T^* \in B(H)$ هست که

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \qquad (x, y \in H)$$

و همچنین

$$\|T^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} \sup_{\|y\|\leq 1} |\langle Tx, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \|T\|$$

T^* را الحاقی T می گویند.

قضیه ۶.۲.۴ اگر H یک فضای هیلبرت باشد آنگاه $T \longrightarrow T^*$ یک اینولوشن بر $B(H)$ است که $B(H)$ را به یک B^*-جبر تبدیل می کند.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که

$$\begin{aligned} (T+S)^* &= T^*+S^* & (1)\\ (\alpha T)^* &= \bar{\alpha}T^* & (2)\\ (ST)^* &= T^*S^* & (3)\\ T^{**} &= T & (4) \end{aligned}$$

(۱) بدیهی است. محاسبات

$$\begin{aligned} \langle x,(\alpha T)^*y\rangle &= \langle \alpha Tx,y\rangle = \alpha\langle Tx,y\rangle = \alpha\langle x,T^*y\rangle = \langle x,\bar{\alpha}T^*y\rangle\\ \langle x,(ST)^*y\rangle &= \langle STx,y\rangle = \langle Tx,S^*y\rangle = \langle x,T^*S^*y\rangle\\ \langle Tx,y\rangle &= \overline{\langle T^*y,x\rangle} = \overline{\langle y,T^{**}x\rangle} = \langle T^{**}x,y\rangle \end{aligned}$$

(۲) و (۳) و (۴) را نتیجه می‌دهد. چون

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx,Tx\rangle = \langle T^*Tx,x\rangle \le \|T^*T\|.\|x\|^2 \qquad (x\in H)$$

داریم $\|T\|^2 \le \|T^*T\|$. از طرف دیگر،

$$\|T^*T\| \le \|T^*\|\|T\| = \|T\|^2$$

و لذا $\|T^*T\| = \|T\|^2$، یعنی $B(H)$ یک B^*−جبر است. □

قضیه ۷.۲.۴ (قضیهٔ گلفاند−نیمارک) گیریم $A\neq 0$ یک B^*−جبر جابجایی واحددار باشد. در این‌صورت تبدیل گلفاند $\hat{x}\longrightarrow x$ یک ایزومورفیسم ایزومتری از A بروی $C(\mathfrak{M})$ است که در آن $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(A)$.

به‌علاوه همواره $\widehat{x^*}=\bar{\hat{x}}$. بالاخص، A متقارن و نیم‌ساده است.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که $x\to\hat{x}$ یک ایزومتری است. گیریم $x\in A$ دلخواه باشد. داریم:

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^*x^2\| = \|(x^*x)^*(x^*x)\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4$$

و بنابراین $\|x^2\| = \|x\|^2$، و به استقراء $\|x^{2^n}\| = \|x\|^{2^n}$. پس

$$\|\hat{x}\|_\infty = \rho(x) = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\|x^n\|} = \lim \sqrt[2^n]{\|x^{2^n}\|} = \|x\|$$

لذا $A \to \hat{A} = C(\mathfrak{M})$ یک ایزومتری و A نیم_ساده است. اکنون نشان می‌دهیم که A متقارن (تبدیل گلفاند$*$—هومورفیسم) است. گیریم $x \in A$ و $f \in \mathfrak{M}$ دلخواه باشند. قرار می‌دهیم، $\hat{x}(f) = \alpha + \beta i$ و $(x^*)\widehat{\ }(f) = \gamma + \delta i$. نشان می‌دهیم که $\alpha = \gamma$ و $\beta = -\delta$.

فرض کنیم $\beta + \delta \neq 0$، قرار می‌دهیم $y = (\beta+\delta)^{-1}[x + x^* - (\alpha+\gamma)e]$. به‌وضوح $y^* = y$ و $\hat{y}(f) = i$. اکنون به‌ازاء هر عدد حقیقی r داریم

$$(y + ire)\widehat{\ }(f) = i(1+r)$$

و بنابراین

$$\begin{aligned} 1 + r^2 + 2r &= |1+r|^2 = |(y+ire)\widehat{\ }(f)|^2 \leq \|(y+ire)\hat{\ }\|_\infty^2 = \|y+ire\|^2 \\ &= \|(y+ire)^*(y+ire)\| = \|(y-ire)(y+ire)\| = \|y^2 + r^2 e\| \\ &\leq \|y^2\| + r^2 \end{aligned}$$

و یا $(r \in \mathbb{R})$ $1 + 2r \leq \|y^2\|$، که با قرار دادن $r = \|y^2\|$ خواهیم داشت $1 + \|y^2\| \leq 0$ که این یک تناقض است. پس $\beta = -\delta$. حال چون $(ix)\widehat{\ }(f) = -\beta + \alpha i$ و $[(ix)^*]\widehat{\ }(f) = -i\widehat{x^*}(f) = \delta - i\gamma$ باتوجه به قسمت اخیر $\alpha = \gamma$. پس تبدیل گلفاند یک $*$—هومورفیسم (A متقارن) است. بالاخره، چون $\hat{A}$ زیرجبری از $C(\mathfrak{M})$ است که توابع ثابت را در بر داشته، تحت مزدوج‌گیری بسته است $(\bar{\hat{x}} = \widehat{x^*} \in \hat{A})$ و نقاط $\mathfrak{M}$ را جدا می‌کند، بنابه قضیهٔ استون—وایراشتراس $\hat{A}$ در $C(\mathfrak{M})$ چگال است که باتوجه به بسته بودن $\hat{A}$ (تبدیل گلفاند ایزومتری است) داریم $\hat{A} = C(\mathfrak{M})$. □

نتیجه ۸.۲.۴ اگر A یک B^*- جبرجابجایی با $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(A) \neq \emptyset$ باشد آنگاه A با B^*—جبر $C_0(\mathfrak{M})$ به‌طور ایزومتری $*$—ایزمورفیک است.

برهان. می‌دانیم $\mathfrak{M}$ یک فضای موضعاً فشرده و هاسدورف و تبدیل گلفاند $\hat{x} \longrightarrow x$ یک هومورفیسم از A بتوی $C_0(\mathfrak{M})$ با هستهٔ $rad(A)$ می‌باشد. قرار می‌دهیم $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$. داریم $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}(A_1) = \{F_f : f \in \mathfrak{M}(A)\} \cup \{F_\infty\}$ که در آن همواره $F_f(x + \lambda e) = f(x) + \lambda$ و $F_\infty(x+\lambda e) = \lambda$. با استدلالی شبیه اثبات قضیهٔ گلفاند—نیمارک داریم $\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x\|$. پس

$$\|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|f(x)| : f \in \mathfrak{M}(A)\} = \sup\{|F(x,0)| : F \in \mathfrak{M}(A_1)\}$$

$$= \quad \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_{A_1}(x,0)\} = \rho(x,0) = \lim_{n\to\infty} \|(x,0)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x\|$$

پس تبدیل گلفاند یک ایزومتری است. A_1 با اینولوشن

$$(x+\lambda e)^* = x^* + \bar{\lambda} e \quad (x \in A, \lambda \in \mathbb{C})$$

یک جبر اینولوشن‌دار است. می‌توان دید که نرم معادلی با نرم معمول $\|x+\lambda e\| = \|x\| + |\lambda|$ بر A_1 موجود است که A_1 را تبدیل به یک B^*−جبر می‌کند (رجوع شود به تمرین زیر). بنابراین

$$\begin{aligned} (x^*)\widehat{\ }(f) &= f(x^*) = F_f(x^*,0) = F_f((x,0)^*) = [(x,0)^*]\widehat{\ }(F_f) = \overline{(x,0)\widehat{\ }(F_f)} \\ &= \overline{F_f(x,0)} = \overline{f(x)} = \overline{\hat{x}(f)} \qquad (x \in A, f \in \mathfrak{M}(A)) \end{aligned}$$

و لذا تبدیل گلفاند یک $*$−هomomorfism است.

بالاخره نشان می‌دهیم که تبدیل گلفاند برو است. گیریم $\varphi \in C_0(\mathfrak{M})$ دلخواه باشد. می‌دانیم نگاشت $F_f \xrightarrow{\psi} f$ یک همئومورفیسم از $\mathfrak{M}$ بروی $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ می‌باشد. φ_1 را بر $\mathfrak{M}_1$ با ضابطهٔ $\varphi_1(F_f) = \varphi(f)$ و $\varphi_1(F_\infty) = 0$ تعریف می‌کنیم. چون $\varphi_1|_{\mathfrak{M}_1\setminus\{F_\infty\}} = \varphi \circ \psi^{-1} : F_f \xrightarrow{\psi^{-1}} f \xrightarrow{\varphi} \varphi(f)$ پیوسته و $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ در $\mathfrak{M}_1$ باز است، لذا φ_1 بر $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ پیوسته است.

توضیح. گیریم X و Z فضاهای توپولوژیکی و Y زیرمجموعه‌ای باز در X، $h : X \longrightarrow Z$ و $h|_Y : Y \longrightarrow Z$ پیوسته باشد. به‌ازاء هر $y \in Y$ و هر همسایگی V از $h(y) = h|_Y(y)$ همسایگی U از y در Y هست که $h(U) = h|_Y(U) \subseteq V$. مجموعهٔ باز U' در X هست که $U = U' \cap Y$. چون Y باز است لذا U در X باز بوده و لذا یک همسایگی y در X است. پس h در هر نقطهٔ Y پیوسته است. $\star$

نشان می‌دهیم که φ_1 در F_∞ نیز پیوسته است. گیریم $\varepsilon > 0$ دلخواه باشد. مجموعهٔ فشردهٔ $K \subseteq \mathfrak{M}$ هست که $f \in \mathfrak{M} \setminus K \Rightarrow |\varphi(f)| < \varepsilon$. اکنون $\psi(K)$ یک مجموعهٔ فشرده در $\mathfrak{M}_1 \setminus \{F_\infty\}$ و بالنتیجه در $\mathfrak{M}_1$ است. پس $\mathfrak{M}_1 \setminus \psi(K)$ یک همسایگی F_∞ در $\mathfrak{M}_1$ است و

$$F \in \mathfrak{M}_1 \setminus \psi(K) \Rightarrow F = F_f \ (\exists f \in \mathfrak{M} \setminus K) \ \text{یا} \ F = F_\infty$$

$$\Rightarrow |\varphi_1(F) - \varphi_1(F_\infty)| = |\varphi_1(F)| = \begin{cases} |\varphi(f)| & F = F_f(\exists f \in \mathfrak{M} \setminus K) \\ 0 & F = F_\infty \end{cases} < \varepsilon$$

یعنی φ_1 در F_∞ پیوسته است. بنابراین $\varphi_1 \in C(\mathfrak{M}_1)$ و لذا $x+\lambda e \in A_1$ هست که $\varphi_1 = (x+\lambda e)\widehat{}$. داریم

$$0 = \varphi_1(F_\infty) = \widehat{(x+\lambda)}(F_\infty) = F_\infty(x+\lambda e) = \lambda$$

و لذا

$$\varphi(f) = \varphi_1(F_f) = F_f(x+\lambda e) = f(x) + \lambda = f(x) = \hat{x}(f) \qquad (f \in \mathfrak{M} = \mathfrak{M}(A))$$

پس $\varphi = \hat{x}$ یعنی تبدیل گلفاند برو است. $\square$

نتیجه ۹.۲.۴ طیف هر عضو هرمیتی از یک B^*−جبر حقیقی است.

برهان. گیریم A یک B^*−جبر و x عضوی هرمیتی از A باشد. ابتدا گیریم A واحددار باشد. قرار می‌دهیم $A_0 = \overline{[e,x]}$. A_0 یک B^*−جبرجابجایی است و بنابراین بنابه قضیهٔ گلفاند−نیمارک $\sigma_{A_0}(x) \subseteq \mathbb{R}$. حال چون $\sigma_{A_0}(x)$ نقطهٔ درونی (در $\mathbb{C}$) ندارد لذا بنا به نتیجهٔ (۳.۲.۳)، $\sigma_A(x) = \sigma_{A_0}(x) \subseteq \mathbb{R}$.

اکنون گیریم A واحددار نباشد. $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ با اینولوشن $(x+\lambda e)^* = x^* + \bar{\lambda} e$ و نرمی معادل با نرم معمول یک B^*−جبراست (تمرین زیر). حال چون $(x,0)$ در A_1 هرمیتی است با توجه به قسمت اخیر

$$\sigma_A(x) = \sigma_A(x,0) \subseteq \mathbb{R}$$

$\square$

نتیجه ۱۰.۲.۴ برای هر عضو هرمیتی x از یک B^*−جبر A داریم

$$\rho(x) = \|x\|$$

برهان. ابتدا گیریم A واحددار باشد. اگر A جابجایی باشد باتوجه به قضیهٔ گلفاند−نیمارک داریم

$$\rho(x) = \|\hat{x}\|_\infty = \|x\|$$

اگر A جابجایی نباشد قرار می‌دهیم $A_0 = \overline{[e,x]}$. A_0 یک B^* جبر جابجایی است و x عضوی هرمیتی از A_0 است. پس باتوجه به قضایای (۹.۲.۴) و (۳.۲.۳)، $\sigma_A(x) = \sigma_{A_0}(x) \subseteq \mathbb{R}$. پس در A_0،

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \|x\|$$

اکنون فرض می‌کنیم A واحددار نباشد. بنابه تمرین زیر $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ یک B^*-جبر با نرم معادل $|||.|||$ با نرم معمول $\|x + \lambda e\| = \|x\| + |\lambda|$ می‌باشد که به‌ازاء هر $x \in A$، $\|x\| = |||x|||$. پس باتوجه به قسمت فوق

$$\rho_A(x) = \rho_{A_1}(x, 0) = |||(x, 0)||| = \|x\|$$

□

تمرین: اگر A یک B^*-جبر بدون واحد باشد آنگاه نرم $|||.|||$ بر $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ موجود است که A_1 را به یک B^*-جبر تبدیل می‌کند. بعلاوه $|||.|||$ با نرم معمول $\|x + \lambda e\| = \|x\| + \|\lambda\|$ معادل است و داریم $|||x||| = \|x\| \quad (x \in A)$.

برهان. به‌ازاء هر $x \in A_1$، نگاشت خطی $l_x : A \longrightarrow A$ را با ضابطهٔ $l_x(a) = xa$ که $(a \in A)$ در نظر می‌گیریم. به‌وضوح داریم $\|l_x\| \leq \|x\|$. قرار می‌دهیم

$$|||x||| = \|l_x\| := sup\{\|xa\| : a \in A,\ \|a\| \leq 1\} \qquad (x \in A_1)$$

داریم $|||x||| \leq \|x\|$. بوضوح، $(x + \lambda e)^* = x^* + \bar{\lambda} e$ $(x \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$ یک اینولوشن بر A_1 است. اگر $0 \neq x \in A$، آنگاه $\frac{x^*}{\|x\|} \in A$ و $\|\frac{x^*}{\|x\|}\| = 1$، و لذا

$$|||x||| \geq \|x\frac{x^*}{\|x\|}\| = \frac{\|xx^*\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|^2}{\|x\|} = \|x\|$$

و بنابراین $\|x\| = |||x|||$ $(x \in A)$. واضح است که $|||x|||$ یک نیم‌نرم بر A_1 بوده $(|||x + y||| \leq |||x||| + |||y|||$ و $|||\alpha x||| = |\alpha|.|||x||| \ , \quad |||x||| \geq 0)$ و $|||xy||| \leq |||x|||.|||y|||$.

نشان می‌دهیم که این یک نرم است. فرض می‌کنیم $x = x' + \lambda e$ $(x' \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$ و $|||x||| = 0$. داریم $l_x = 0$ و لذا به‌ازاء هر $y \in A$، $xy = 0$. اگر $\lambda \neq 0$، آنگاه به‌ازاء هر $y \in A$، $0 = \lambda^{-1}xy = \lambda^{-1}x'y + y$ یا $y = (-\lambda^{-1}x'y)$، یعنی $(-\lambda^{-1}x')$ یک واحد چپ برای A است. پس A دارای واحد است که این یک تناقض می‌باشد.

توضیح. $(A$ واحد چپ $e \quad \Rightarrow \quad ea^* = a^*\ (a \in A) \Rightarrow ae^* = (ea^*)^* = a^{**} = a\ (a \in A)$

$\Rightarrow \quad A$ واحد راست $e^* \Rightarrow A$ واحد $e = e^*)$

⋆

پس $\lambda = 0$ و لذا $x = x' \in A$، که این نتیجه می‌دهد $0 = |||x||| = \|x\|$، و لذا $x = 0$.

بنابراین $|||x|||$ یک نرم بر A_1 است. نشان می‌دهیم که $(A_1, |||.|||)$ باناخ است. گیریم $x_n = x'_n + \lambda_n e$ $(x'_n \in A,\ \lambda_n \in \mathbb{C})$ یک دنبالهٔ کوشی در $(A_1, |||.|||)$ باشد. چون $\|x\| \quad (x \in A)$ $|||x||| =$ لذا A با $|||.|||$ تام و بالنتیجه بسته است و بنابراین $\frac{A_1}{A} = \langle e + A\rangle$ با $(x \in A_1)$ $|||x + A||| = inf_{a \in A}|||x + a|||$ یک فضای نرم‌دار است. اما

$$
\begin{aligned}
|\lambda_m - \lambda_n|.|||e + A||| &= |||(\lambda_m e + A) - (\lambda_n e + A)||| = |||(x_m + A) - (x_n + A)||| \\
&\leq |||x_m - x_n||| \to 0 \qquad (m, n \to \infty)
\end{aligned}
$$

که با توجه به $|||e + A||| \neq 0$ دنبالهٔ $\{\lambda_n\}$ در $\mathbb{C}$ کوشی و بالنتیجه همگرا است. گیریم $\lambda_n \to \lambda$. پس $x'_n = x_n - \lambda_n e$ یک دنبالهٔ کوشی در فضای تام $(A, |||.|||) = (A, \|.\|)$ می‌باشد. لذا $x' \in A$ هست که $|||x'_n - x'||| \to 0$. پس $x_n \to x' + \lambda e$ در $(A_1, |||.|||)$ و لذا این فضا تام است. بنابراین باتوجه به قضیهٔ نگاشت باز $\|.\| \sim |||.|||$

توضیح. چون $|||x||| \leq \|x\|$ لذا $id : (A_1, \|.\|) \to (A_1, |||.|||)$ پیوسته و درنتیجه بنابه قضیهٔ نگاشت باز، باز می‌باشد. $\star$

بالاخره نشان می‌دهیم که $|||x|||^2 \leq |||x^*x|||$ که از این‌جا خواهیم داشت

$$|||x|||^2 = |||x^*x|||$$

توضیح.

$$|||x|||^2 \leq |||x^*x||| \leq |||x^*|||.|||x||| \Rightarrow |||x||| \leq |||x^*|||$$

پس $|||x||| = |||x^{**}||| \leq |||x^*|||$، و لذا $|||x^*||| = |||x|||$. بنابراین

$$|||x|||^2 \leq |||x^*x||| \leq |||x^*|||.|||x||| = |||x\|^2$$

$\star$

کافی است این مطلب را در حالت $|||x||| = 1$ ثابت کنیم. فرض می‌کنیم $0 < r < 1$ دلخواه باشد. چون $\|l_x\| = |||x||| = 1 > \sqrt{r}$، $xy \in A$ هست $\|y\| \leq 1$ و $\|xy\| \geq \sqrt{r}$ یا $\|xy\|^2 \geq r$. حال از آن‌جا که $xy \in A$، داریم

$$|||x^*x||| \geq |||y^*(x^*x)y||| = |||(xy)^*(xy)||| = \|(xy)^*(xy)\| = \|xy\|^2 \geq r$$

اگر $r \to 1$، خواهیم داشت $|||x^*x||| \geq 1$. از اینجا حکم ثابت است. □

قضیه ۱۱.۲.۴ اگر A یک B^*—جبر با واحد e و A_0 یک $*$—زیرجبر بسته از A شامل e باشد آنگاه به‌ازاء هر $x \in A_0$، $\sigma_{A_0}(x) = \sigma_A(x)$.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر عضوی از A_0 در A معکوس‌پذیر باشد آنگاه در A_0 نیز چنین است. گیریم $z \in A_0$ و $z^{-1} \in A$. داریم $(z^*)^{-1} = (z^{-1})^* \in A$ و z^*z عضوی هرمیتی از A_0 است که در A معکوس‌پذیر است. بنا به نتیجه (۹.۲.۴)، $\sigma_A(z^*z)$ حقیقی است. به‌علاوه $0 \notin \sigma_A(z^*z)$. اما چون $\sigma_A(z^*z)$ صفحهٔ مختلط را نامرتبط نمی‌کند، لذا بنابه قضیهٔ (۴.۲.۳)، $\sigma_A(z^*z) = \sigma_{A_0}(z^*z)$. بنابراین $0 \notin \sigma_{A_0}(z^*z)$ و لذا z^*z در A_0 معکوس‌پذیر است. به‌طریق مشابه zz^* در A_0 معکوس‌پذیر است. پس z در A (معکوس‌پذیر چپ و راست و بالنتیجه) معکوس‌پذیر است.

اکنون به‌ازاء هر $x \in A_0$، چون $\lambda e - x \in A_0$ داریم

$$\lambda \notin \sigma_{A_0}(x) \Leftrightarrow \lambda e - x \in G(A_0) \Longleftrightarrow \lambda e - x \in G(A) \Longleftrightarrow \lambda \notin \sigma_A(x)$$

و بنابراین $\sigma_A(x) = \sigma_{A_0}(x)$ و حکم ثابت است. □

نتیجه ۱۲.۲.۴ اگر x عضوی نرمال از B^*—جبر واحددار A باشد،

$$\sigma_A(x) = \sigma_{A_0}(x)$$

که در آن $A_0 = \overline{[e, x, x^*]}$ زیرجبر بسته و جابجایی (و خودالحاق) تولیدشده به‌وسیلهٔ e و x و x^* است.

تبصره. شرط $\|x^*x\| = \|x\|^2$ در تعریف B^*—جبر در عمل زیاد مفید نیست و اگر نرم دیگر معادلی را اختیار کنیم، نرم جدید در نامساوی

$$\|x^*\|\|x\| \leq C\|x^*x\| \qquad (۱)$$

صدق می‌کند. نشان می‌دهیم که اگر نرم یک $*$—جبر جابجایی A (بااینولوشن پیوسته) در رابطهٔ اخیر صدق کند آنگاه A یک B^*—جبر است (این امر در حالت غیرجابجایی نیز برقرار است).

قضیه ۱۳.۲.۴ گیریم A یک $*$−جبرجابجایی واحددار (با اینولوشن پیوسته) بوده و نرم آن در رابطهٔ (۱) صدق کند. در این‌صورت A یک B^*−جبر است.

برهان. بنابه قضیهٔ (۶.۱.۴) می‌توان فرض کرد که همواره $\|x^*\| = \|x\|$. نشان می‌دهیم که $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$ یک نرم جبری (زیرضربی) معادل بر A است که در رابطهٔ $\rho(x)^2 = \rho(x^*x)$ صدق می‌کند. قبلاً دیده‌ایم که $\rho(x)$ یک نیم−نرم جبری بر A است. گیریم $x \in A$ دلخواه باشد. داریم $\|(x^*)^n\|\|x^n\| \leq C\|(x^*x)^n\|$، و لذا با گرفتن ریشهٔ nام از طرفین و میل دادن n به سمت بی‌نهایت خواهیم داشت $\rho(x^*)\rho(x) \leq \rho(x^*x)$. همچنین $\rho(x^*) = \lim_{n\to\infty} \|(x^*)^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} = \rho(x)$، و بنابراین $\rho(x)^2 \leq \rho(x^*x)$. پس $\rho(x)^2 = \rho(x^*x)$. اکنون کافی است ثابت کنیم ρ و $\|.\|$ با هم معادل هستند (در این‌حالت ρ نرم می‌شود زیرا $\rho(x) = 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$)

اگر $z \in A$ هرمیتی باشد آنگاه از (۱)، داریم $\|z\|^2 \leq C\|z^2\|$ که به استقراء خواهیم داشت $\|z\|^{2^n} \leq C^{2^n-1}\|z^{2^n}\|$، و یا $\|z\| \leq C^{\frac{2^n-1}{2^n}}\|z^{2^n}\|^{2^{-n}}$ که اگر $n \to \infty$، خواهیم داشت $\|z\| \leq C\rho(z)$. حال اگر $x \in A$ دلخواه باشد، داریم

$$\|x\|^2 = \|x^*\|\|x\| \leq C\|x^*x\| \leq C^2\rho(x^*x) = C^2\rho(x)^2$$

و یا $\|x\| \leq C\rho(x)$ که به‌همراه $\rho(x) \leq \|x\|$، خواهیم داشت $\rho \sim \|.\|$ و حکم ثابت است. □

۳.۴ نظریهٔ نمایش جبرهای اینولوشن‌دار

تعریف ۱.۳.۴ گیریم H یک فضای هیلبرت و $B(H)$، B^*−جبر کلیهٔ اندومورفیسم‌های پیوسته بر H باشد. هر $*$−هومومورفیسم از $*$−جبر A بتوی $B(H)$ را یک نمایش A در فضای هیلبرت H می‌گویند. بنابراین یک نمایش نگاشتی مانند $x \to T_x$ از A بتوی $B(H)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند.

(i) $\quad T_{\alpha x+\beta y} = \alpha T_x + \beta T_y$

(ii) $\quad T_{xy} = T_x T_y$

(iii) $\quad T_{x^*} = (T_x)^*$

(iv) $\quad T_e = I$ اگر A دارای واحد باشد. I عملگر همانی بر H است.

تعریف ۲.۳.۴ نمایش $x \to T_x$ از $*-$جبر A در فضای هیلبرت H را یک نمایش دوری می‌گویند هرگاه عضوی مانند $\xi_0 \in H$، بنام بردار دوری نمایش، موجود باشد بطوری که $\{T_x\xi_0 :\ x \in A\}$ در H چگال باشد. این مجموعه بوضوح یک زیرفضای H است.

تعریف ۳.۳.۴ گیریم H_1 و H_2 دو فضای هیلبرت باشند. عملگر خطی (و پیوستهٔ) $S : H_1 \to H_2$ را یکانی گوییم هرگاه به ازاء هز $x \in H$، $\|Sx\| = \|x\|$ یا بطور معادل $\langle S_x, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$ برای هر $x, y \in H$.

تمرین: اگر $S \in B(H)$، نشان دهید گزاره‌های زیر معادلند:

(a) $S^*S = SS^* = I$

(b) $S(H) = H$ و $\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, y\rangle$ برای هر $x, y \in H$.

(c) $S(H) = H$ و S یکانی است.

برهان. (a) $\Leftarrow$ (b): چون $SS^* = I$، لذا $S(H) = H$. همچنین چون $S^*S = I$،

$$\langle Sx, Sy\rangle = \langle x, S^*Sy\rangle = \langle x, y\rangle$$

(b) $\Leftarrow$ (c): بدیهی است.

(c) $\Leftarrow$ (a):

$$\langle S^*Sx, y\rangle = \langle Sx, Sx\rangle = \|Sx\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

برای هر $x \in H$. بنابراین $S^*S = I$. چون بنا به فرض S یک ایزومتری خطی از H بروی H است پس S در $B(H)$ معکوس‌پذیر است. حال چون $S^*S = I$ پس $S^{-1} = S^*$ و لذا (a) برقرار است. □

تعریف ۴.۳.۴ نمایشهای $x \to T_x$ و $x \to T'_x$ از $*-$جبرA در فضاهای H و H' را معادل گوییم هر گاه عملگر یکانی S ازH به روی H' باشد بطوری که

$$T'_xS\xi = ST_xS\xi$$

برای هر $x \in A$ و هر$\xi \in H$. به عبارت دیگر به ازای هر $x \in A$، دیاگرام زیر جابجایی است

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{T_x} & H \\ S\downarrow & & \downarrow S \\ H' & \xrightarrow[T'_x]{} & H' \end{array}$$

تعریف ۵.۳.۴ گوییم زیرفضای بسته H_1 از H یک زیرفضای پایای نمایش $x \to T_x$ است هرگاه به ازاء هر $x \in A$, $T_x H_1 \subseteq H_1$. در این حالت $x \to T_x |_{H_1}$ یک نمایش A در H_1 می‌باشد.

توضیح.

$$\begin{aligned} \langle T_{x^*}\Big|_{H_1}(\overset{\in H_1}{\overset{\uparrow}{\xi}}), \overset{\in H_1}{\overset{\uparrow}{\eta}}\rangle &= \langle Tx^*\xi, \eta\rangle = \langle (T_x)^*(\xi), \eta\rangle \\ &= \langle \xi, T_x\eta\rangle = \langle \xi, T_x |_{H_1}(\eta)\rangle = \langle (T_x |_{H_1})^*\xi, \eta\rangle \end{aligned}$$

$\star$

نمایش $x \to T_x$ را تحویل ناپذیر گوییم هر گاه هیچ زیرفضای بسته و سره (مغایر با $\{0\}$ و H) پایا نداشته باشد.

قضیه ۶.۳.۴ نمایش $x \to T_x$ از $*-$جبر A در فضای هیلبرت H تحویل ناپذیر است اگر و فقط اگر برای هر $S \in B(H)$ که به ازاء هر $x \in A$, $ST_x = T_x S$ داشته باشیم $S = \lambda I$ برای یک $\lambda \in \mathbb{C}$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $x \to T_x$ تحویل ناپذیر بوده و عملگر S با کلیه T_x ها $(x \in A)$ جابجا شود. ابتدا گیریم S هرمیتی باشد. قرار می دهیم $A_s = \overline{[I, S]}$. این یک B^*-جبر جابجایی است و با توجه به قضیه گلفاند—نیمارک $A_S \cong C(\mathfrak{M}(A(S))) \cong C(\sigma(S))$ بطور $*-$ایزومورفیسم ایزومتری، زیرا با توجه به یکی از قضایا $\mathfrak{M}(A_S)$ با $\sigma(S) = \sigma_A(S) = \sigma_{AS}(S)$ (تحت نگاشت $f \to f(s)$) همئومورفیک است.

توضیح. اگر $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ یک همئومورفیسم از فضای فشرده Ω_1 بروی Ω_2 باشد آنگاه $C(\Omega_2) \to C(\Omega_1)$ با ضابطه $f \to fo\phi$ یک $*-$ایزومورفیسم ایزومتری از $C(\Omega_2)$ B^*-جبر بروی $C(\Omega_1)$ B^*-جبر است. $\star$

نشان می دهیم که طیف $\sigma(S)$ بیش از یک نقطه نمی‌تواند داشته باشد. فرض کنیم $\sigma(S)$ حداقل دو نقطه داشته باشد (فرض خلف). بنابراین $C(\sigma(S))$ مقسوم علیه صفر (ناصفر) داشته و لذا $U, V \in A_S$ هستند که $U \neq 0 \neq V$ و $UV = VU = 0$.

توضیح. $\psi : A_S \to C(\mathfrak{M}(A_S)) \overset{\varphi}{\to} C(\sigma(S))$ یک $*-$ایزومورفیسم ایزومتری است. اگر λ_1 و λ_2 دو نقطه متمایز فضای (موضعاً) فشرده و هاسدورف $\sigma(S)$ باشند آنگاه با توجه به

$$\underbrace{\{\lambda_i\}}_{\text{فشرده}} \subseteq \underbrace{\sigma(S) - \{\lambda_j\}}_{\text{باز}} \qquad (i \neq j)$$

توابع $(i,j=1,2;\ i\neq j)\{\lambda_i\}\prec h_i\prec\sigma(S)-\{\lambda_j\}$ موجودند. اکنون $(i,j=1,2)h_i(\lambda_j)=\delta_{ij}$ قرار می‌دهیم $h=h_1-h_2$، $g_1=h^+$ و $g_2=h^-$. داریم $0\neq g_1,g_2\in C(\sigma(S))$ و $g_1g_2=0$. اما $U,V\in A_S$ هستند که $g_1=\psi(U)$ و $g_2=\psi(V)$. پس $U,V\neq 0$ ولی از آنجا که $\psi(UV)=\psi(U)\psi(V)=g_1g_2=0$، داریم $UV=0$.

$\star$

زیرفضای بسته $H_1=\overline{U(H)}$ را در نظر می‌گیریم. بوضوح $H_1\neq 0$. چون $V\neq 0$ لذا $V^*\neq 0$ و در نتیجه $\varphi\in H$ هست که $\xi=V^*\varphi\neq 0$. اکنون به ازاء هر $\eta\in U(H)$ داریم $\eta=U\psi$ که در آن $\psi\in H$، و لذا

$$<\xi,\eta>=<V^*\varphi,U\psi>=<\varphi,VU\psi>=<\varphi,0>=0$$

در نتیجه $\xi\perp V(H)$، و لذا $\xi\perp H_1$ که با توجه به این که $\xi\neq 0$ داریم $H_1^\perp\neq\{0\}$ و یا $H_1\neq H$ (زیرا $H=H_1\bigoplus H_1^\perp$). چون کلیه عناصر A_S با T_xها $(x\in A)$ جابجا می‌شوند برای هر $x\in A$ داریم $T_xU(H)=UT_x(H)\subseteq U(H)$ و لذا $T_xH_1\subseteq H_1$، یعنی H_1 یک زیرفضای پایاست که این با تحویل ناپذیر بودن نمایش متناقض است. پس $\sigma(S)$ حداکثر از یک نقطه تشکیل شده است. اگر $\sigma(S)=\{\lambda\}$ آنگاه در $\mathfrak{M}(A_S)$ داریم $(\lambda I-S\hat{)}=0$ (زیرا به ازای هر $f\in\mathfrak{M}(A_S)$ داریم $((\lambda I-S\hat{)}(f)=\lambda\hat{I}(f)-\hat{S}(f)=\lambda-\lambda=0$) و لذا $S=\lambda I$.

اکنون گیریم S دلخواه باشد. داریم $S=S_1+iS_2$ که در آن $S_1=\frac{S+S^*}{2}$ و $S_2=\frac{S-S^*}{2i}$ هرمیتی و با هر $(x\in A)T_x$ جابجا می‌شوند. پس بنا به حالت فوق $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{C}$ هستند که $S_1=\lambda_1 I$ و $S_2=\lambda_2 I$. پس $S=\lambda I$ که در آن $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$.

بالعکس فرض می‌کنیم نمایش $x\to T_x$ تحویل ناپذیر نباشد. پس زیرفضای بسته سره و پایای H_1 از H موجود است. فرض می‌کنیم P_1 و P_2 به ترتیب تصاویر H بر H_1 و $H_2=H_1^\perp$ باشند. برای هر $x\in A$ و $\xi\in H$ داریم $T_xP_1\xi\in H_1$، و لذا $P_1T_xP_1\xi=T_xP_1\xi$. پس

$$P_1T_xP_1=T_xP_1 \qquad (۱)$$

برای هر $x\in A$. به علاوه چون $P_1+P_2=I$ (زیرا $H_1\bigoplus H_2=H_1\bigoplus H_1^\perp=H$)، داریم:

$$P_1T_x=P_1T_x(P_1+P_2)=P_1T_xP_1+P_1T_xP_2 \qquad (۲)$$

اما H_2 نیز یک زیرفضای پایای نمایش $x \to T_x$ است.

$$\left(\xi \in H_2 = H_1^{\perp}, \eta \in H_1, < T_x\xi, \eta >=< \xi, \underbrace{T_{x*}\eta}_{\in H_1} >= 0 \quad \text{زیرا}\right)$$

لذا به مانند (۱) برای هر $x \in A$، $P_2T_xP_2 = T_xP_2$ و لذا $P_1P_2T_xP_2 = P_1T_xP_2$.

اما $P_1P_2 = P_1(I - P_1) = P_1 - P_1 = 0$، که با توجه به (۲) داریم:

$$P_1T_x = P_1T_xP_1 + P_1P_2T_xP_2 = P_1T_xP_1 \tag{۳}$$

اکنون با مقایسه (۱) و (۳) داریم $P_1T_x = T_xP_1$ برای هر $x \in A$. بنابراین عملگرهای T_x $(x \in A)$ با عملگر P_1 که بوضوح به صورت ضریب اسکالر از عملگر همانی نیست جابجا شده و حکم ثابت است.

$$\left(P_1 = \lambda I \implies P_1 = 0 \ \text{ یا } \ \text{برو}\ P_1 \implies H_1 = 0 \ \text{ یا } \ H_1 = H \quad \text{تناقض}\right)$$

□

تعریف ۷.۳.۴ تابعک خطی f بر $*-$جبر A را یک تابعک مثبت گوییم هرگاه به ازای هر $x \in A$،

$$f(x^*x) \geq 0$$

تابعک خطی f بر $*-$جبر A را یک تابعک حقیقی گوییم هرگاه به ازای هر $x \in A$،

$$f(x^*) = \overline{f(x)}$$

تمرین: اگر f یک تابعک مثبت بر $*-$جبر واحددار A باشد آنگاه f یک تابعک حقیقی است و به ازای هر $x, y \in A$ داریم:

$$| f(y^*x) |^2 \leq f(y^*y)f(x^*x) \tag{۱}$$

برهان. قرار می دهیم $s = f(x^*y)$، $r = f(y^*x)$، $q = f(y^*y)$ و $p = f(x^*x)$. به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}$ داریم:

$$0 \leq f((x^*+\bar{\alpha}y^*)(x+\alpha y)) = f(x^*x)+\alpha f(x^*y)+\bar{\alpha}f(y^*x)+ | \alpha |^2 f(y^*y) = p+\alpha s+\bar{\alpha}r+ | \alpha |^2 q \tag{۲}$$

که با قرار دادن $\alpha = 1$ و $\alpha = i$ داریم $s + r \in \mathbb{R}$ و $i(s - r) \in \mathbb{R}$، و لذا $\bar{r} = s$.

$$(r = a + ib, s = c + id \Rightarrow b + d = 0, a - c = 0 \Rightarrow a = c, b = -d \Rightarrow r = \bar{s})$$

در حالت خاص، با قرار دادن $y = e$ خواهیم داشت $f(x^*) = \overline{f(x)}$.

اگر $r = 0$ (۱) بدیهی است. اگر $r \neq 0$، و در (۲) قرار می دهیم $\alpha = \frac{tr}{|r|}$ که در آن t حقیقی و دلخواه است، خواهیم داشت:

$$-p + \frac{tsr}{|r|} + \frac{t|r|^2}{|r|} + t^2 q \geq 0$$

یا

$$p + 2t \mid r \mid + t^2 q \geq 0 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

که از اینجا خواهیم داشت $\Delta' = |r|^2 - pq \leq 0$ یا $|r|^2 \leq p.q$، و حکم ثابت است. $\square$

قضیه ۸.۳.۴ اگر f یک تابعک مثبت بر $*-$جبر واحددار A باشد، آنگاه f پیوسته است و به علاوه

$$\mid f(x) \mid \leq f(e) \parallel x \parallel \qquad (x \in A) \tag{۱}$$

برهان. داریم

$$(1-t)^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} t^n \qquad (-1 < t < 1) \tag{۲}$$

که در آن

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} = 1 \quad , \quad \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

چون سری فوق همگرای مطلق است لذا بنا به قضیه مرتنس

$$1 - t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \qquad (-1 < t < 1) \tag{۳}$$

که در آن

$$c_n = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{\frac{1}{2}}{n-k}$$

بنابراین از (۳) خواهیم داشت $c_0 = 1$، و $c_1 = -1$ و $c_n = 0$ $(n = 2, 3, \cdots)$. گیریم x عضو هرمیتی دلخواهی از A باشد که $\parallel x \parallel < 1$. چون

$$\begin{aligned} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} &= (-1)^n \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^{2n-1} \frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})\cdots(n-1-\frac{1}{2})}{n!} < 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots) \end{aligned}$$

لذا با توجه به (۲)،

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n\| = 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}\|x^n\| \leq 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\binom{\frac{1}{2}}{n}\|x\|^n = 1-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}\|x\|^n < \infty \quad (۴)$$

در نتیجه

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n \quad (۵)$$

همگرا و لذا y خوشتعریف است. اکنون با توجه به (۴) مشابه قضیه مرتنس ثابت می‌شود که

$$y^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n=e-x$$

بعلاوه با توجه به (پیوستگی اینولوشن و) اینکه ضرایب سری (۵) حقیقی هستند داریم $y^*=y$. بنابراین $y^*y=y^2=e-x$ و لذا $f(e)-f(x)=f(e-x)=f(y^*y)\geq 0$. بطریق مشابه $f(e)+f(x)=f(e)-f(-x)\geq 0$. پس $f(x)$ و $f(e)$ اعدادی حقیقی هستند و داریم $|f(x)|\leq f(e)$.

اکنون گیریم $x\in A$ $(\neq 0)$ هرمیتی و $\delta>1$ دلخواه باشند. داریم $\|\frac{x}{\delta\|x\|}\|<1$ و لذا $|f(\frac{x}{\delta\|x\|})|\leq f(e)$ و یا $|f(x)|\leq \delta f(e)\|x\|$ که با توجه به دلخواه بودن $\delta>1$، اگر $\delta\to 1+$ خواهیم داشت $|f(x)|\leq f(e)\|x\|$.

بالاخص به ازای هر $x\in A$ چون x^*x هرمیتی است داریم

$$f(x^*x)\leq f(e)\|x^*x\|\leq f(e)\|x\|^2 \quad (٦)$$

با قرار دادن $y=e$ در نامساوی $|f(y^*x)|^2\leq f(y^*y)f(x^*x)$، داریم $|f(x)|^2\leq f(e)f(x^*x)$ که به همراه (٦) خواهیم داشت $|f(x)|^2\leq [f(e)]^2\|x\|^2$؛ یعنی (۱) برقرار است.

اکنون قضیه فوق را به جبرهای بدون واحد تعمیم می دهیم. $\square$

قضیه ۹.۳.۴ گیریم A یک $*$−جبر (با اینولوشن پیوسته) با واحد تقریبی چپ (محدود) باشد. در این صورت هر تابعک مثبت بر A پیوسته است.

برهان. گیریم f یک تابعک مثبت بر A باشد. $A_1=A\bigoplus\lambda e$ با اینولوشن $(x+\lambda e)^*=x^*+\overline{\lambda}e$ یک $*$−جبر است. به ازاء هر $a\in A$،

$$F_a(x)=f(a^*xa) \qquad (x\in A_1)$$

یک تابعک مثبت بر A_1 بوده و لذا بنا به قضیه (۸.۳.۴) بر A_1 و بالنتیجه بر A پیوسته می‌باشد. براحتی می‌توان دید

$$4axb = \sum_{k=0}^{3} i^k (a^* + i^{-k}b)^* x (a^* + i^{-k}b) \qquad (a, x, b \in A)$$

بنابراین

$$4f(axb) = \sum_{k=0}^{3} i^k f[(a^* + i^{-k}b)^* x (a^* + i^{-k}b)] \qquad (a, x, b \in A)$$

و لذا به ازاء هر $a, b \in A$ نگاشت $x \to f(axb)$ یک تابعک پیوسته بر A می‌باشد حال گیریم در A، $x_n \to 0$. بنا به تعمیم قضیه کوهن داریم $x_n = ay_n$ که در آن $a \in A$ ثابت و $y_n \to 0$. گیریم (δ_α) یک واحد تقریبی چپ برای A باشد. چون $\| \delta_\alpha^* \| = \| \delta_\alpha \|$ و به ازاء $x \in A$،,

$$\lim_\alpha x\delta_\alpha^* = \lim_\alpha (\delta_\alpha x^*)^* = [\lim_\alpha \delta_\alpha x^*]^* = x^{**} = x$$

لذا (δ_α^*) یک واحد تقریبی راست برای A بوده و در نتیجه بنا به صورت راست تعمیم قضیه کوهن (تمرین) داریم $y_n = z_n b$ که در آن $b \in A$ ثابت بوده و $z_n \to 0$. پس $x_n = az_nb$ و $z_n \to 0$، که بنا به پیوستگی $x \to f(axb)$ بر A داریم $f(x_n) = f(az_nb) \to 0$. یعنی f پیوسته است. □

قضیه ۱۰.۳.۴ هر نمایش $x \to T_x$ از یک $*-$جبر واحددار A پیوسته است و بعلاوه به ازاء هر $x \in A$

$$\| T_x \| \leq \| x \| \qquad (۱)$$

یعنی $\| T \| \leq 1$.

برهان. به ازاء هر $\xi \in A$، نگاشت $f_\xi(x) = < T_x\xi, \xi >$ یک تابعک مثبت بر A است، زیرا بوضوح خطی بوده و داریم $f_\xi(x^*x) = < T_{x^*x}\xi, \xi > = < T_x\xi, T_x\xi > = \| T_x\xi \|^2 \geq 0$. بنابراین بنا به قضیه (۸.۳.۴) به ازاء هر $x \in A$ $| f_\xi(x) | \leq f_\xi(e) \| x \| = \| \xi \|^2 \| x \|$. پس

$$\| T_x\xi \|^2 = < T_x\xi, T_x\xi > = < T_{x^*x}\xi, \xi > = f_\xi(x^*x) \leq \| \xi \|^2 \| xx^* \| \leq \| \xi \|^2 \| x \|^2$$

و (۱) برقرار است.

اکنون ارتباط بین تابعک‌های مثبت و نمایش های دوری $*-$جبرها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. □

قضیه ۱۱.۳.۴ اگر A یک $*-$جبر واحددار و $x \to T_x$ یک نمایش دوری A در فضای هیلبرت H با بردار دوری ξ_0 باشد، آنگاه تابعک

$$f(x) = < T_x\xi_0, \xi_0 > \qquad (۱)$$

مثبت است و نمایش را با تقریب معادل بودن تعیین می‌کند.

بالعکس به ازای هر تابعک مثبت f بر A نمایش دوری $x \to T_x$ از A در فضای هیلبرت H با بردار دوری ξ_0 موجود است به طوری که در (۱) صدق می‌کند.

برهان. تابعک f با ضابطه (۱) به وضوح مثبت است. فقط باقی می‌ماند ثابت کنیم که اگر $f(x) = < T_x\xi_0, \xi_0 > = < T'_x\xi'_0, \xi'_0 >'$، که در آن $x \to T_x$ و $x \to T'_x$ نمایش‌های دوری A در فضاهای هیلبرت H, H' با ضرب های داخلی $<,>$ و $'<,>$ و بردارهای دوری ξ_0 و ξ'_0 باشند آنگاه دو نمایش $x \to T_x$ و $x \to T'_x$ معادل هستند. قرار می‌دهیم $\xi_x = T_x\xi_0$ و $\xi'_x = S\xi_x = T'_x\xi'_0$. تابع S بر $Z = \{\xi_x = T_x\xi_0 : x \in A\}$ خوش تعریف است زیرا

$$\begin{aligned}
\xi_x = \xi_y \quad & \Longrightarrow \quad T_x\xi_0 = T_y\xi_0 \implies T_{z^*}T_x\xi_0 = T_{z^*}T_y\xi_0 \qquad (z \in A)\\
& \Longrightarrow \quad < T_{z^*x}\xi_0, \xi_0 > = < T_{z^*y}\xi_0, \xi_0 > \qquad (z \in A)\\
& \Longrightarrow \quad 0 = < T_{z^*(x-y)}\xi_0, \xi_0 > = f(z^*(x-y)) = < T'_{z^*(x-y)}\xi'_0, \xi'_0 >' \qquad (z \in A)\\
& \Longrightarrow \quad < T'_{x-y}\xi'_0, T'_z\xi'_0 >' = 0 \qquad (z \in A)\\
& \overset{\text{چگال بودن}}{\Longrightarrow} \quad < T'_{x-y}\xi'_0, \xi' >' = 0 \qquad (\xi' \in H')\\
& \Longrightarrow \quad T'_{x-y}\xi'_0 = 0 \implies T'_x\xi'_0 = T'_y\xi'_0
\end{aligned}$$

نشان می‌دهیم که S یک عملگر یکانی (ایزومتری) از زیرفضای چگال $Z = \{\xi_x = T_x\xi_0 : x \in A\} \subseteq H$ به توی H' است. بوضوح S خطی است. همچنین

$$\begin{aligned}
< S\xi_x, S\xi_y >' &= < T'_x\xi'_0, T'_y\xi'_0 >' = < T'_{y^*x}\xi'_0, \xi'_0 >'\\
&= f(y^*x) = < T_{y^*x}\xi_0, \xi_0 > = < T_x\xi_0, T_y\xi_0 > = < \xi_x, \xi_y >
\end{aligned}$$

چون Z در H چگال است عملگر S بطور پیوسته و منحصربفرد بر تمام H توسیع می‌یابد. حال چون $SZ = \{\xi'_x \in H' : x \in A\}$ در H' چگال و S یک ایزومتری است، S فضای H را بر کل فضای H' می‌نگارد

(رجوع شود به لم ۱۶—۴ از کتاب آنالیز حقیقی و مختلط رودین). به ازاء هر $\xi_x(=T_x\xi_0)\in Z$ داریم

$$ST_y\xi_x = ST_{yx}\xi_0 = T'_{yx}\xi'_0 = T'_yT'_x\xi'_0 = T'_yS\xi_x \qquad (y\in A)$$

و بنابراین $ST_y = T'_yS$ زیرا Z در H چگال است. پس دو نمایش فوق معادلند.

بالعکس، فرض کنیم f یک تابعک مثبت بر A باشد. فضای هیلبرت H و نمایش دوری $x\to T_x$ از A در H با بردار دوری ξ_0 را چنان خواهیم ساخت که (۱) برقرار باشد. برای این منظور فرم $\langle,\rangle$ را بر $A\times A$ بصورت

$$\langle x,y\rangle = f(y^*x) \qquad (x,y\in A)$$

تعریف می‌کنیم. واضح است که $\langle,\rangle$ در شرایط زیر صدق می‌کند

$$(i):\ \langle x,x\rangle\geq 0$$

$$(ii):\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,y\rangle=\alpha_1\langle x_1,y\rangle+\alpha_2\langle x_2,y\rangle$$

$$(iii):\langle y,x\rangle=\overline{\langle x,y\rangle}$$

($\langle,\rangle$ یک شبه ضرب داخلی بر A است). براحتی می‌توان دید که $I=\{x\in A:\langle x,x\rangle=0\}$ یک ایده‌آل چپ در A است.

توضیح.

$$x_1,x_2,x\in I,\quad y\in A,\quad \alpha\in\mathbb{C}$$

$$\langle x_1+x_2,x_1+x_2\rangle=\langle x_1,x_2\rangle+\langle x_2,x_1\rangle=0$$

زیرا

$$|\langle x_i,x_j\rangle|^2\leq\langle x_i,x_i\rangle\langle x_j,x_j\rangle=0$$

بعلاوه $\langle\alpha x,\alpha x\rangle=|\alpha|^2\langle x,x\rangle=0$ و

$$|\langle yx,yx\rangle|^2=|f((yx)^*yx)|^2=|f(x^*(y^*yx))|^2\leq f(x^*x)f((y^*yx)^*(y^*yx))=0$$

$\star$

براحتی می توان دید که

$$\langle x+I,y+I\rangle=\langle x,y\rangle \qquad (x,y\in I)$$

یک ضرب داخلی خوشتعریف بر $\frac{A}{I}$ می‌باشد.

توضیح.

$$x+I=x'+I \quad , \quad y+I=y'+I \implies x-x' \in I \ \ , \ \ y-y' \in I$$

$$\begin{aligned} \implies \langle x,y\rangle - \langle x',y'\rangle &= \langle x,y\rangle - \langle x',y\rangle + \langle x',y\rangle - \langle x',y'\rangle \\ &= \langle x-x',y\rangle + \langle x',y-y'\rangle \\ &= f(y^*(x-x')) + f((y-y')^*x') = 0+0 = 0 \end{aligned}$$

$$\langle x+I,x+I\rangle = 0 \implies \langle x,x\rangle = 0 \implies x\in I \implies x+I=I$$

$\star$

گیریم H تتمیم $\frac{A}{I}$ باشد (تتمیم یک فضای ضرب داخلی یک فضای هیلبرت است). به ازاء هر $x\in A$ $T_x : \frac{A}{I} \longrightarrow \frac{A}{I}$ را با ضابطه $T_x(y+I)=xy+I$ در نظر می‌گیریم. T_x خوشتعریف است:

$$y+I=y'+I \Rightarrow y-y'\in I \quad \overset{\text{ایده آل چپ است } I}{\Longrightarrow} \quad x(y-y')\in I \Rightarrow xy+I=xy'+I$$

بوضوح T_x بر فضای $\frac{A}{I}$ خطی است. نشان می‌دهیم که $\| T_x \| \le \| x \|$. در واقع

$$\|T_x(y+I)\|^2 = \langle T_x(y+I),T_x(y+I)\rangle = \langle xy,xy\rangle = f((xy)^*xy) = f(y^*x^*xy) \qquad (y\in A)$$

اما برای یک yی دلخواه نگاشت $f_y(x)=f(y^*xy)$ یک تابعک مثبت بر A بوده و لذا بنا به قضیهٔ (۸.۳.۴)

$$\begin{aligned} \|T_x(y+I)\|^2 &= f(y^*x^*xy) = f_y(x^*x) \le f_y(e)\|x^*x\| = f(y^*y)\|x^*x\| \\ &\le \langle y,y\rangle\|x\|^2 = \|x\|^2\|y+I\|^2 \qquad (y\in A) \end{aligned}$$

پس $\| T_x \| \le \| x \|$. اکنون چون T_x یک نگاشت پیوسته بر زیر مجموعه چگال $\frac{A}{I}$ از H است T_x بطور پیوسته و منحصربفرد بر H گسترش می یابد($T_x\in B(H)$) و براحتی می‌توان دید که $x\longrightarrow T_x$ یک نمایش A در H است.

توضیح. به عنوان مثال به ازاء هر $x,y,z\in A$

$$\begin{aligned} <(T_x)^*(y+I),(z+I)> &= <y+I,T_x(z+I)> = <y+I,xz+I> = <y,xz> \\ &= f((xz)^*y) = f(z^*x^*y) = <x^*y,z> = <x^*y+I,z+I> \\ &= <T_{x^*}(y+I),z+I> \end{aligned}$$

$\star$

لذا بنا به چگال بودن $\frac{A}{I}$ در H، داریم $\langle T_{x^*}\xi,\eta\rangle = \langle (T_x)^*\xi,\eta\rangle$ $(\xi,\eta\in H)$، که از اینجا نتیجه می‌شود $T_{x^*} = (T_x)^*$. براحتی دیده می‌شود که این یک نمایش دوری با بردار دوری $\xi_0 = e+I$ است. بالاخره به ازاء هر $x\in A$،

$$< T_x\xi_0,\xi_0 >=< x+I, e+I >=< x,e >= f(e^*x) = f(x)$$

و حکم ثابت است. $\square$

تعریف ۱۲.۳.۴ گیریم $x \longrightarrow T_x^\alpha$ خانواده‌ای از نمایش‌های $*-$جبر A در فضاهای هیلبرت H_α با ضرب‌های داخلی $<,>_\alpha$ و نرم‌های متناظر $\|\ .\ \|_\alpha$ باشد که در آن $\alpha\in I$. فرض کنیم H فضای برداری متشکل از کلیه عناصر $\xi=(\xi_\alpha)_{\alpha\in I}$ باشد که $\sum_{\alpha\in I}\parallel\xi_\alpha\parallel_\alpha^2<\infty$

توضیح. در واقع:

$$\sum_{\alpha\in I}\parallel\lambda\xi_\alpha+\lambda'\xi'_\alpha\parallel^2\leq 2\mid\lambda\mid^2\sum_{\alpha\in I}\parallel\xi_\alpha\parallel_\alpha^2+2\mid\lambda'\mid^2\sum_{\alpha\in I}\parallel\xi'_\alpha\parallel_\alpha^2<\infty$$

اگر $\xi=(\xi_\alpha)\in H$ و $\xi'=(\xi'_\alpha)\in H$. $\star$

اکنون ضرب داخلی را در H بصورت

$$\langle\xi,\eta\rangle=\sum_{\alpha\in I}\langle\xi_\alpha,\eta_\alpha\rangle_\alpha \qquad (\xi=(\xi_\alpha),\eta=(\eta_\alpha))$$

در نظر می گیریم. این ضرب داخلی خوشتعریف و H را به یک فضای هیلبرت تبدیل می کند. زیرا

خوشتعریفی:

$$\sum_{\alpha\in I}\mid<\xi_\alpha,\eta_\alpha>_\alpha\mid\leq\sum_{\alpha\in I}\parallel\xi_\alpha\parallel_\alpha\parallel\eta_\alpha\parallel_\alpha\leq(\sum_{\alpha\in I}\parallel\xi_\alpha\parallel_\alpha^2)^{\frac12}(\sum_{\alpha\in I}\parallel\eta_\alpha\parallel_\alpha^2)^{\frac12}<\infty$$

(ابتدا برای زیر مجموعه‌های متناهی $J\subseteq I$ رابطه فوق را ثابت کنید) براحتی دیده می‌شود که $<,>$ یک ضرب داخلی بر H است و

$$\parallel\xi\parallel^2=<\xi,\xi>=\sum_{\alpha\in I}<\xi_\alpha,\xi_\alpha>_\alpha=\sum\parallel\xi_\alpha\parallel_\alpha^2$$

تام بودن: گیریم $\xi_n=(\xi_{n\alpha})_\alpha$ یک دنباله کوشی در H باشد. به ازای هر $\epsilon>0$، یک N هست که

$$m,n\geq N\Rightarrow\parallel\xi_{m\alpha}-\xi_{n\alpha}\parallel_\alpha^2\leq\sum_{\alpha\in I}\parallel\xi_{m\alpha}-\xi_{n\alpha}\parallel^2=\parallel\xi_m-\xi_n\parallel^2<\epsilon^2 \qquad (\alpha\in I) \qquad (1)$$

پس هر $(\xi_{n\alpha})_{n\geq 1}$ کوشی و بالنتیجه $\xi_{n\alpha} \to \xi_\alpha$ وقتی که $n \to \infty$ همگراست. اکنون اگر در (۱)، n ثابت و $m \to \infty$ خواهیم داشت

$$\sum_{\alpha\in I} \parallel \xi_\alpha - \xi_{n\alpha} \parallel^2 \leq \epsilon^2 \qquad (۲)$$

رابطه (۲) نشان می دهد که $\xi = (\xi_\alpha) \in H$ و $\xi_n \to \xi$.

نمایش $x \to T_x$ از A در H بصورت

$$T_x\xi = (T_x^\alpha \xi_\alpha)_{\alpha\in I}$$

خوشتعریف بوده و آن را حاصل جمع مستقیم نمایش‌های $x \to T_x^\alpha \quad (\alpha \in I)$ می‌گویند، زیرا با توجه به قضیه (۱۰.۳.۴) چون

$$\parallel T_x\xi \parallel^2 = \sum_\alpha \parallel T_x^\alpha \xi_\alpha \parallel_\alpha^2 \leq \parallel x \parallel^2 \sum_{\alpha\in I} \parallel \xi \parallel_\alpha^2 = \parallel x \parallel^2 \parallel \xi \parallel^2$$

داریم $T_x \in B(H)$.

به ازای هر $\alpha_0 \in I$ اگر ایزومتری خطی $S_{\alpha_0} : H_{\alpha_0} \to H$ با ضابطه $\xi_{\alpha_0} \to (\eta_\alpha)_{\alpha\in I}$ را در نظر بگیریم که در آن $\eta_{\alpha_0} = \xi_{\alpha_0}$ و $\eta_\alpha = 0$ اگر $\alpha \neq \alpha_0$، آنگاه $T_x S_{\alpha_0}\xi_{\alpha_0} \in S_{\alpha_0}(H_{\alpha_0})$ $(x \in A)$، و لذا $S_{\alpha_0}(H_{\alpha_0})$ یک زیرفضای بسته پایا از H است.

۴.۴ قضیه نمایش برای B^*–جبرها

نشان خواهیم داد که هر B^*–جبر به طور ایزومتری با یک $*$–زیرجبر بسته $B(H)$، $*$–ایزومورفیک است. در ادبیات ریاضی زیرجبرهای بسته و خودالحاق $B(H)$ را C^*–جبر می‌گویند. بنابراین می‌توان گفت هر B^*–جبر یک C^*–جبر است. واضح است که هر C^*– جبر نیز یک B^*– جبر است و بنابراین دو خانواده برهم منطبق می‌گردند.

قضیه ۱.۴.۴ گیریم A یک B^*–جبر بدون واحد باشد. در این صورت A به طور $*$–ایزومورفیسم ایزومتری در یک B^*– جبر واحددار $\tilde{A}$ نشانده می‌شود.

برهان. به ازای هر $x \in A$، عملگر چپ-ضرب $l_x : A \to A$ با ضابطه $l_x y = xy$ را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$\| l_x \| = \sup_{\|y\| \leq 1} \| xy \| \leq \| x \|$$

از طرف دیگر

$$\| x \|^2 = \| x^* \|^2 = \| xx^* \| = \| l_x x^* \| \leq \| l_x \| \| x^* \| = \| l_x \| \| x \|$$

و لذا $\| l_x \| \leq \| x \|$. پس $\| l_x \| = \| x \|$ و $A \to B(A)$ با ضابطه $x \to l_x$ یک ایزومورفیسم ایزومتری به روی تصویرش می‌باشد. فرض کنیم I عملگر همانی بر A باشد. قرار می‌دهیم

$$\tilde{A} = \{l_x + \alpha I : x \in A, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$\tilde{A}$ یک زیرجبر واحددار $B(A)$ است که A در آن به صورت ایزومورفیسم ایزومتری نشانده شده است. به علاوه از آنجا که $\tilde{A} = \{l_x : x \in A\} + < I >$ مجموع یک زیرفضای بسته با یک زیرفضای با بعد متناهی است بسته می‌باشد. اینولوشن را بر $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T^* = l_{x^*} + \bar{\alpha} I \qquad (T = l_x + \alpha I)$$

توضیح.

خوش تعریفی: چون A واحددار نیست و $\{l_x : x \in A\}$ با A ایزومورفیک است، $I \notin \{l_x : x \in A\}$ و لذا نمایش هر عضو T از $\tilde{A}$ به صورت $T = l_x + \alpha I$ منحصر به فرد است. اصول اینولوشن به طور بدیهی برقرارند. $\star$

نشان می‌دهیم که $\tilde{A}$ یک B^*-جبر است. اگر $T = l_x + \alpha I$، داریم:

$$\begin{aligned} \|Ty\|^2 &= \|xy + \alpha y\|^2 = \|(xy + \alpha y)^*(xy + \alpha y)\| = \|y^*(T^*Ty)\| \\ &\leq \|y^*\|\|T^*Ty\| \leq \|T^*T\|\|y\|^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\| T \|^2 = (\sup_{\|y\| \leq 1} \| Ty \|)^2 \leq \| T^*T \| \leq \| T^* \| \| T \| \tag{1}$$

و لذا $\| T^* \| \leq \| T \|$ که از اینجا نیز نتیجه می‌شود که $\| T \| \leq \| T^* \|$. پس داریم $\| T \| = \| T^* \|$ که با توجه به (۱) نتیجه می‌شود $\| T \|^2 = \| T^*T \|$. سرانجام با توجه به تعریف اینولوشن در $\tilde{A}$، واضح است که $x \to l_x$ یک $*$-هومومورفیسم بوده و حکم ثابت است. $\square$

تعریف ۲.۴.۴ فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان اعداد حقیقی و K یک مخروط در X باشد، یعنی زیرمجموعه ای از X که از $x, y \in K$ و $\alpha, \beta > 0$ نتیجه شود $\alpha x + \beta y \in K$ (این معادل است با $x + y \in K$ و $\alpha x \in K$ هرگاه $x, y \in K$ و$\alpha > 0$). به عنوان مثال اگر f یک تابعک خطی حقیقی بر X باشد آنگاه $\{x \in X : f(x) \geq 0\}$ یک مخروط در X است. اگر K یک مخروط در X باشد آنگاه به راحتی دیده می‌شود که رابطه $x \prec_K y$ با ضابطه $y - x \in K$ یک رابطه متعدی است و اگر $x \prec_K u$، $y \prec_K v$ و $\alpha, \beta > 0$ آنگاه $\alpha x + \beta y \prec_K \alpha u + \beta v$.

تعریف ۳.۴.۴ تابعک خطی حقیقی f بر X را نسبت به مخروط K مثبت گوییم هرگاه $x \prec_K y$ نتیجه دهد $f(x) \leq f(y)$ یا به طور معادل اگر $x \in K$ آنگاه $f(x) \geq 0$.

قضیه ۴.۴.۴ گیریم Y یک زیرفضای برداری از فضای برداری حقیقی X و K یک مخروط در X باشد. فرض کنیم تابعک خطی f بر Y نسبت به مخروط $K \bigcap Y$ مثبت بوده و به ازای هر$z \in X$، $(z + K) \bigcap Y \neq \emptyset$. در این صورت تابعک خطی F برX هست که نسبت به مخروط K مثبت بوده و به ازای هر $x \in X$، داریم $F(x) = f(x)$.

برهان. گیریم $\mathcal{P}$ گردآیه کلیه‌ی ازواج (X_α, F_α) باشد که در آن X_α زیرفضایی از X شامل Y وF_α یک تابعک خطی بر X_α باشد به طوری که به ازای هر $x \in Y$، $F_\alpha(x) = f(x)$ و به ازای هر $x \in K \bigcap X_\alpha$، $F_\alpha(x) \geq 0$. واضحست که $(Y, f) \in \mathcal{P} \neq \varnothing$. رابطه $\leq$ را در $\mathcal{P}$ به صورت

$$(X_\alpha, F_\alpha) \leq (X_\beta, F_\beta) \iff X_\alpha \subseteq X_\beta, F_\beta |_{X_\alpha} = F_\alpha$$

در نظر می‌گیریم. براحتی دیده می‌شود که $\leq$ یک رابطه ترتیب جزئی در $\mathcal{P}$ بوده و هر زنجیر ناتهی در آن دارای یک بند بالا است. بنابراین بنا به لم زرن $\mathcal{P}$ دارای عضو ماکسیمالی مانند (X_0, F) می‌باشد. کافی است نشان دهیم $X_0 = X$. فرض کنیم چنین نباشد (فرض خلف). بنابراین $z \in X \backslash X_0$ موجود است. قرار می‌دهیم $X_1 = X_0 + < z >$ و

$$\mu = \inf_{\substack{y - z \in K \\ y \in X_0}} F(y) \quad , \quad \lambda = \sup_{\substack{z - y \in K \\ y \in X_0}} F(y)$$

داریم $\mu < \infty$ و $\lambda > -\infty$، زیرا مجموعه‌های مورد نظر تهی نمی‌باشند.

توضیح.

$$(z+K)\cap Y \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists k_1 \in K, \exists y_1 \in Y, z+k_1 = y_1 \quad \overset{Y\subseteq X_0}{\Longrightarrow} \quad y_1 \in X_0, y_1 - z = k_1 \in K$$

$$(-z+K)\cap Y \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad \exists k_2 \in K, \exists (-y_2) \in Y, -z+k_2 = -y_2 \quad \underset{Y\subseteq X_0}{\Longrightarrow} \quad y_2 \in X_0, z - y_2 = k_2 \in K$$

$\star$

داریم $\lambda \leq \mu$، زیرا اگر $\mu < \lambda$ آنگاه بنا به خاصیت مشخصه سوپریموم $y_1 \in X_0$ هست که $z - y_1 \in K$ و $\mu < F(y_1)$ و از اینجا بنا به خاصیت مشخصه اینفیموم $y_2 \in X_0$ هست که $y_2 - z \in K$ و $F(y_2) < F(y_1)$، پس $y_2 - y_1 (\in X_0) = (y_2 - z) + (z - y_1) \in K$ و $F(y_2 - y_1) = F(y_2) - F(y_1) < 0$ که یک تناقض است. حال اگر t را چنان اختیار کنیم که $\lambda \leq t \leq \mu$ و تابعک خطی F_1 را بر X_1 با ضابطه

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x) & x \in X_0 \\ t & x = z \end{cases}$$

در نظر بگیریم آنگاه خواهیم داشت $(X_0, F) \lneqq (X_1, F_1) \in \mathcal{P}$ که این متناقض با ماکسیمال بودن (X_0, F) است.

توضیح. گیریم $x = y + \alpha z \in K \bigcap X_1$ که در آن $y \in X_0$ و $\alpha \in \mathbb{R}$. اگر

$$I: \quad \alpha = 0 \Rightarrow x = y \in K \bigcap X_0 \Rightarrow F_1(x) = F(y) \geq 0$$

$$II: \quad \alpha > 0 \Rightarrow \frac{x}{\alpha} = z - (-\frac{y}{\alpha}) \in K, (-\frac{y}{\alpha}) \in X_0 \Rightarrow F(-\frac{y}{\alpha}) \leq \lambda \leq t \Rightarrow F_1(x) = F(y) + \alpha t \geq 0$$

$$III: \quad \alpha < 0 \Rightarrow \frac{x}{-\alpha} = (-\frac{y}{\alpha}) - z \in K, (-\frac{y}{\alpha}) \in X_0 \Rightarrow F(-\frac{y}{\alpha}) \geq \mu \geq t \Rightarrow F_1(x) = F(y) + \alpha t \geq 0$$

$\star$

بنابراین فرض خلف باطل، $X_0 = X$ و F توسیع مطلوب می‌باشد. $\square$

قضیه ۵.۴.۴ گیریم x و y عناصری هرمیتی از B^*-جبر A باشند. حال اگر $\sigma(x) \geq 0$ و $\sigma(y) \geq 0$ آنگاه $\sigma(x+y) \geq 0$ (عبارت $\sigma(z) \geq 0$ بدین معنی است که هر عضو $\sigma(z)$ یک عدد حقیقی نامنفی است).

برهان. می‌توان فرض نمود که $A \neq 0$ واحددار است. چون x هرمیتی است لذا $\| x \| = \rho(x)$. گیریم $\epsilon > 0$ دلخواه باشد. عدد $\lambda > 0$ را چنان اختیار می‌کنیم که اگر $x' = \lambda(x + \epsilon e)$

و$(\rho(y') =\| y' \|$ و $\rho(x') =\| x' \|$ $y' = \lambda(y+\epsilon e)$ آنگاه $\rho(x'), \rho(y') < 1$ y', x' هرمیتی‌اند و لذا $\rho(y') =\| y' \|$ و $\rho(x') =\| x' \|$).
بنابراین $0 < \sigma(e-x') < 1$ و $0 < \sigma(e-y') < 1$ (داریم $\lambda\epsilon \leq \sigma(x') = \lambda(\sigma(x)+\epsilon) \leq \rho(x') < 1$، و لذا $0 < \sigma(e-x') = 1-\sigma(x') \leq 1-\lambda\epsilon < 1$، و به همین ترتیب $0 < \sigma(e-y') < 1$). بنابراین $\rho(e-x') < 1$ و $\rho(e-y') < 1$. پس $\rho(e-\frac{x'+y'}{2}) \leq \frac{1}{2}\rho(e-x') + \frac{1}{2}\rho(e-y') < 1$. حال از آنجا که $x'+y'$ هرمیتی و لذا $\sigma(x'+y')$ حقیقی است داریم:

$$1-\sigma(\frac{x'+y'}{2}) \leq| 1-\sigma(\frac{x'+y'}{2}) |=| \sigma(e-\frac{x'+y'}{2}) |< 1$$

و لذا $\sigma(\frac{x'+y'}{2}) > 0$. پس $\lambda[\sigma(x+y)+2\epsilon] = \sigma(\lambda(x+y+2\epsilon e)) = 2\sigma(\frac{x'+y'}{2}) > 0$ و یا $\sigma(x+y) > -2\epsilon$ که با توجه دلخواه بودن $\epsilon > 0$ خواهیم داشت $\sigma(x+y) \geq 0$. $\square$

لم ۶.۴.۴ اگر x عضوی از B^*−جبر A باشد که $\sigma(x^*x) \leq 0$، آنگاه $x = 0$.

برهان. می‌توان فرض نمود که $A \neq 0$ واحددار است. می‌نویسیم $x = h+ik$ که در آن k, h هرمیتی‌اند. داریم $x^* = h-ik$ و لذا $x^*x + xx^* = 2(h^2+k^2)$. چون h هرمیتی است $\sigma(h^2) \geq 0$ (اگر $A_0 = \overline{[e,h]}$ آنگاه $\sigma(h^2) = \sigma_A(h^2) = \sigma_{A0}(h^2) = \{f(h^2) : f \in \mathfrak{M}(A_0)\} = \{| f(h) |^2 : f \in \mathfrak{M}(A_0)\} \geq 0$) و به همین ترتیب $\sigma(k^2) \geq 0$. حال چون k^2, h^2 نیز هرمیتی‌اند بنا به قضیه (۵.۴.۴) $\sigma(x^*x + xx^*) \geq 0$. اما با توجه به قضیه‌ی (۶.۲.۳) $\sigma(x^*x) \bigcup \{0\} = \sigma(xx^*) \bigcup \{0\}$، و لذا با توجه به فرض $\sigma(xx^*) \leq 0$ یا $\sigma(-xx^*) \geq 0$. حال چون $(x^*x + xx^*)$ و $-xx^*$ هرمیتی‌اند با توجه به قضیه (۵.۴.۴) $\sigma(x^*x) = \sigma[(x^*x + xx^*) + (-xx^*)] \geq 0$.
بنابراین $\sigma(x^*x) = \{0\}$، و لذا $\| x \|^2 = \| x^*x \| = \rho(x^*x) = 0$. $\square$

لم ۷.۴.۴ به ازای هر x از B^*−جبر A داریم $\sigma(x^*x) \geq 0$.

برهان. می‌توان فرض نمود که $A \neq 0$ واحددار است. گیریم $A_0 = \overline{[e, x^*x]}$ زیر جبر بسته تولید شده به وسیله عضو هرمیتی x^*x باشد. A_0 یک B^*−جبر جابجایی واحددار بوده و با توجه به قضیه گلفاند−نیمارک $A_0 \cong C(\mathfrak{M}(A_0))$ به طور $*$−ایزومورفیسم ایزومتری. چون x^*x هرمیتی است $\sigma(x^*x)$ یعنی برد $\hat{(x^*x)}$ حقیقی است. قرار می دهیم $\hat{h} = [\hat{(x^*x)}]^+$ و $\hat{k} = [\hat{(x^*x)}]^-$. در این صورت $h, k \in A_0$ عناصر هرمیتی با طیف نامنفی می‌باشند (در واقع $\sigma(h) = \sigma_{A0}(h) = \hat{h}(\mathfrak{M}(A_0)) \geq 0$ و به همین ترتیب $\sigma(k) \geq 0$) و داریم $x^*x = h-k$ و $hk = kh = 0$. می‌نویسیم $y = xk$. داریم $y^*y = kx^*xk = k(h-k)k = -k^3$ و بنابراین

و $(x^*x)^2 = x^*x(h-k) = x^*xh$ پس. $xk = y = 0$ (۶.۴.۴) پس با توجه به لم. $\sigma(y^*y) = -\sigma(k^3) \leq 0$
لذا $\hat{h}(f) = 0$) و لذا $[(\widehat{x^*x})(f)]^2 = (\widehat{x^*x})(f)\hat{h}(f)$ برای هر $f \in \mathfrak{M}(A_0)$. بنابراین اگر $0 \leq (\widehat{x^*x})(f)$ آنگاه
$(\widehat{x^*x})(f) = 0$). پس $(\widehat{x^*x})(f) \geq 0$ برای $f \in \mathfrak{M}(A_0)$، و یا $\sigma(x^*x) := \sigma_A(x^*x) = \sigma_{A_0}(x^*x) \geq 0$. □

نتیجه ۸.۴.۴ هر B^*−جبر واحددار A متقارن است.

برهان. گیریم $x \in A(\neq 0)$ دلخواه و $A_0 = \overline{[e, x^*x]}$ زیر جبر بسته تولید شده بوسیله عضو هرمیتی x^*x باشد. A_0 یک B^*−جبر جابجایی واحددار است و با توجه به لم (۷.۴.۴) $\sigma_A(x^*x) \geq 0$. پس

$$\sigma_{A_0}(e + x^*x) = 1 + \sigma_{A_0}(x^*x) = 1 + \sigma_A(x^*x) \neq \{0\}$$

و لذا $-1 \notin \sigma_{A_0}(x^*x) = \sigma_A(x^*x)$. بنابراین $e + x^*x$ در A_0 معکوس پذیر است. و لذا $e + x^*x$ در A معکوس‌پذیر بوده و این یعنی A متقارن است. □

لم ۹.۴.۴ اگر x عضوی هرمیتی از B^*−جبر A و $\sigma(x) \geq 0$، آنگاه عضو هرمیتی $y \in A$ هست که $x = y^2 = y^*y$.

برهان. می توان فرض کرد که $A \neq 0$ دارای واحد است.

توضیح. زیرا اگر حکم در حالت واحددار برقرار و A بدون واحد باشد در $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$ داریم $\sigma(x) := \sigma_{A_1}(x, 0) \geq 0$ و $(x, 0)^* = (x, 0)$. پس $(y, \lambda) = (y^*, \overline{\lambda}) \in A_1$ هست که

$$(x, 0) = (y, \lambda)(y^*, \overline{\lambda}) = (yy^* + \lambda y^* + \overline{\lambda} y, \mid \lambda \mid^2)$$

پس $\lambda = 0$، $y = y^*$ و $x = y^*y$. ⋆

فرض می‌کنیم $A_0 = \overline{[e, x]}$ زیر جبر تولید شده به وسیله عضو هرمیتی x باشد. A_0 یک B^*−جبر جابجایی است و لذا بنا به قضیه گلفاند−نیمارک $A_0 \cong C(\mathfrak{M}(A_0))$ به طور $*$−ایزومورفیسم ایزومتری. چون $\sigma_{A_0}(x) = \sigma_A(x) \geq 0$، لذا $\hat{x} \geq 0$. بنابراین $\hat{y} = \sqrt{\hat{x}}$ تابعی پیوسته بر $\mathfrak{M}(A_0)$، تبدیل گلفاند عضو هرمیتی $y \in A_0$ است. چون $\hat{y}^2 = \hat{x}$ لذا $x = y^2 = y^*y$. □

نتیجه ۱۰.۴.۴ گیریم A یک B^*−جبر و H_A مجموعه کلیه عناصر هرمیتی A باشد(H_A یک زیرفضای حقیقی A است). در این صورت مخروط $K \subseteq H_A$ تولید شده به وسیله کلیه عناصر x^*x (تشکیل شده از

کلیه حاصل جمع‌های متناهی $\sum \alpha_i x_i^* x_i$ که در آن $x_i \in A$ و $\alpha_i \geq 0$) عبارت است از $\{x \in H_A : \sigma(x) \geq 0\}$.

بنابراین اگر A_0 یک $*-$زیرجبر بسته A باشد آنگاه مخروط $K_0 \subseteq H_{A_0}$ تولید شده به وسیله کلیه عناصر x^*x $(x \in A_0)$ برابر است با

$$K_0 = K \bigcap H_{A_0}$$

قضیه ۱۱.۴.۴ گیریم A یک B^*-جبر واحددار و A_0 یک $*-$زیرجبر بسته A شامل e باشد. در این صورت به ازای هر تابعک مثبت f بر A_0 تابعک مثبت F بر A موجود است به طوری که به ازای هر $x \in A_0$، $F(x) = f(x)$.

برهان. قرار می دهیم $X = H_A$، $Y = H_{A_0}$ و

$$K = \{x \in H_A : \sigma(x) \geq 0\} = \{\sum_{\text{متناهی}} \alpha_i x_i^* x_i : \alpha_i \geq 0, x_i \in A\}$$

Y یک زیرفضای حقیقی فضای حقیقی X بوده و $f \mid_Y$ یک تابعک خطی حقیقی است که نسبت به مخروط

$$K \bigcap Y = K_0 = \{\sum_{\text{متناهی}} \alpha_i x_i^* x_i : \alpha_i \geq 0, x_i \in A_0\}$$

مثبت است. اما به ازای هر $z \in X = H_A$، $\sigma(z)$ حقیقی است. برای Nهای به قدر کافی بزرگ داریم $Ne - z \in K$، و لذا $Ne = z + (Ne - z) \in (z + K) \bigcap Y \neq \varnothing$. بنابراین بنا به قضیه (۴.۴.۴) تابعک خطی حقیقی F بر X هست که $F(x) = f \mid_Y (x)$ برای هر $x \in Y = H_{A_0}$ و $F(x) \geq 0$ برای هر $x \in K$. اکنون کافی است F را بر A به صورت

$$F(x) := F(x_1) + iF(x_2) \qquad (x = x_1 + ix_2, x_1, x_2 \in H_A)$$

توسیع دهیم. □

قضیه ۱۲.۴.۴ گیریم $A \neq 0$ یک B^*-جبر واحددار باشد. فرض کنیم P_0 مجموعه کلیه تابعکهای مثبت بر A باشد که در شرط $f(e) = 1$ صدق می‌کنند. در این صورت نرم A که در رابطه $\| x^*x \| = \| x \|^2$ صدق می‌کند منحصر به فرد تعیین شده و داریم:

$$\| x \| = \sup_{f \in P_0} [f(x^*x)]^{\frac{1}{2}}$$

برهان. $x \in A$ را ثابت در نظر می‌گیریم. به ازای هر $f \in P_0$ داریم

$$f(x^*x) =\mid f(x^*x) \mid\leq f(e) \parallel x^*x \parallel=\parallel x^*x \parallel=\parallel x \parallel^2$$

و بنابراین $\sup_{f\in P_0}[f(x^*x)]^{\frac{1}{2}} \leq\parallel x \parallel$. از طرف دیگر چون x^*x هرمیتی است داریم $\parallel x^*x \parallel= \rho(x^*x)$. بنابراین با در نظر گرفتن B^*–جبر جابجایی و واحددار $A_0 = \overline{[e, x^*x]}$ و این که $\sigma_{A_0}(x^*x) = \sigma_A(x^*x) \geq 0$، عضو $f_0 \in \mathfrak{M}(A_0)$ موجود است که $f_0(x^*x) = \rho(x^*x)$. اما $f_0(e) = 1$ و از آنجا که به ازای هر $z \in A_0$، $\sigma_{A_0}(z^*z) = \sigma_A(z^*z) \geq 0$، داریم $f_0(z^*z) \geq 0$. پس f_0 یک تابعک مثبت بر A_0 بوده و بنا به قضیه (۱۱.۴.۴) به تابعک مثبت F_0 بر A توسیع می یابد. چون $F_0(e) = f_0(e) = 1$، داریم $F_0 \in P_0$. بنابراین $\sup_{f\in P_0}[f(x^*x)] \geq F_0(x^*x) =\parallel x^*x \parallel=\parallel x \parallel^2$ و حکم ثابت است. □

قضیه ۱۳.۴.۴ (قضیهٔ نمایش گلفاند– نیمارک) هر B^* جبر A با $*$–زیر جبر بسته‌ای از یک $B(H)$ بطور ایزومتری $*$– – ایزومورفیک است.

برهان. چون هر B^*–جبر بدون واحد را می‌توان بطور $*$–ایزومورفیسم ایزومتری در یک B^*– جبر واحد دار نشاند لذا می‌توان فرض کرد که A واحددار و مخالف صفر است. گیریم P_0 مجموعه‌ی کلّیه‌ی تابعکهای مثبت f بر A باشد که $f(e) = 1$. به ازای هر $f \in P_0$ با توجه به قضیه‌ی (۱۱.۳.۴) نمایش دوری $x \to T_x^f$ با بردار دوری $\xi_0 f$ در یک فضای هیلبرت $(H^f, <,>_f)$ موجود است بطوری که به ازای هر $x \in A$، $f(x) =< T_x^f\xi_0^f, \xi_0^f >_f$. گیریم $x \longrightarrow T_x$ حاصل جمع مستقیم نمایش های $x \longrightarrow T_x^f$، $f \in P_0$ بوده و $(H, <,>)$ فضای هیلبرت زمینه باشد. نشان می‌دهیم که $x \longrightarrow T_x$ یک $*$– ایزومورفیسم ایزومتری از A به توی $B(H)$ می‌باشد. قبلاً نشان داده‌ایم که این نگاشت یک $*$– هومومورفیسم از A به توی $B(H)$ است و بنابراین کافی است نشان دهیم که این یک ایزومتری است. به ازای هر $f \in P_0$ داریم $1 = f(e) = \|\xi_0^f\|^2$، و لذا

$$\begin{aligned} f(x^*x) &= < T_{x^*x}^f\xi_0^f, \xi_0^f >_f=< T_x^f\xi_0^f, T_x^f\xi_0^f >_f=< T_xS_f\xi_0^f, T_xS_f\xi_0^f > \\ &\leq \|T_x\|^2\|S_f\xi_0^f\|^2 = \|T_x\|^2\|\xi_0^f\|_f^2 = \|T_x\|^2 \leq \|x\|^2 \end{aligned}$$

پس باتوجه به قضیه‌ی (۱۲.۴.۴)

$$\|x\|^2 = \sup_{f\in P_0} f(x^*x) \leq \|T_x\|^2 \leq \|x\|^2$$

و لذا $\|T_x\| = \|x\|$. $\square$

تبصره: برای مدت طولانی معلوم نبود که اگر نرم یک $*$−جبر در رابطه‌ی

$$\|x^*x\| \geq C\|x\|^2$$

صدق کند ، آنگاه یک B^*− جبر است . چنین جبرهایی را $*$− جبرهای آرنس می‌گویند. شخصی به نام یود [1] ثابت کرده است که اگر $C > t_0$ که در آن $t_0 = 0/676...$ ریشه‌ی حقیقی $4t^3 + 2t^2 - t - 1 = 0$ باشد هر $*$−جبر آرنس یک B^*−جبر است. سپس یود [1] این شرط را نیز از میان برداشته و نشان داده است که هر$*$−جبر آرنس یک B^*−جبر است.

۵.۴ نتایجی از قضیه‌ی نمایش

تعریف ۱.۵.۴ عملگر $T \in B(H)$ را یک عملگر مثبت گوییم هر گاه به ازای هر $\xi \in H$

$$< T\xi, \xi > \geq 0$$

چون به ازای هر $\xi \in H$، داریم

$$< T^*\xi, \xi > = < \xi, T\xi > = < T\xi, \xi >$$

لذا $T^* = T$، یعنی هر عملگر مثبت هرمیتی است.

تعریف ۲.۵.۴ اگر A یک B^*−جبر باشد مجموعه‌ی عناصر مثبت A عبارت است از

$$P_A = \{x \in H_A : \sigma(x) \geq 0\}$$

قضیه ۳.۵.۴ گیریم A یک B^*−جبر و T یک $*$−ایزومورفیسم از A به توی $B(H)$ باشد. در این صورت $T(P_A)$ برابر است با مجموعه‌ی کلّیه‌ی عملگرهای مثبت متعلق به زیر جبر $T(A)$ از$B(H)$. بلاخص با در نظر گرفتن عملگر همانی در $B(H)$ عناصر مثبت دقیقاً عملگرهای مثبت می باشند.

[1] Yood

[1] Yood

برهان. گیریم $a \in P_A$. با توجه به قضیه‌ی (۹.۴.۴) عضو هرمیتی $b \in A$ هست که $a = b^*b$. بنابراین

$$< T_a\xi, \xi >=< T_{b^*b}\xi, \xi >=< T_b\xi, T_b\xi >\geq 0 \qquad (\xi \in H)$$

یعنی T_a یک عملگر مثبت است.

بالعکس، فرض می‌کنیم T_a یک عملگر مثبت بوده و نشان می‌دهیم $a \in P_A$. به ازای هر $\xi \in H$، داریم

$$0 \leq< T_a\xi, \xi >=< \xi, T_{a^*}\xi >= \overline{< T_{a^*}\xi, \xi >} =< T_{a^*}\xi, \xi >$$

و یا

$$< T_{a-a^*}\xi, \xi >= 0$$

پس $T_{a-a^*} = 0$ و لذا $a = a^*$، یعنی $a \in H_A$. اکنون داریم $a = h - k$ که در آن $h, k \in P_A$ بوده و $hk = kh = 0$ (اگر $A \neq 0$ واحدار باشد قرار دهید $A_0 = \overline{[e, a]}$ و چون $\hat{a}(\mathfrak{M}(A_0)) = \sigma_{A_0}(a) = \sigma_A(a)$ حقیقی است کافی است قرار دهیم $\hat{h} = (\hat{a})^+$ و $\hat{k} = (\hat{a})^-$. اگر A واحد دار نباشد قرار دهید $A_1 = A \oplus \{\lambda e\}$. بنا به حالت اخیر عناصر $(h, \lambda), (k, \mu) \in P_{A_1}$ هستند که

$$(a, 0) = (h, \lambda) - (k, \mu) \qquad , \qquad (h, \lambda)(k, \mu) = (k, \mu)(h, \lambda) = (0, 0)$$

چون $\lambda - \mu = 0$ و $\lambda\mu = 0$، داریم $\lambda = \mu = 0$. بنابراین $h, k \in P_A$، $a = h - k$ و $hk = kh = 0$). گیریم $k \neq 0$ (فرض خلف) بنابراین $k^3 \neq 0$ (زیرا $\|k^3\| = \rho(k^3) = \rho(k)^3 = \|k\|^3 \neq 0$)، و لذا $T_{k^3} \neq 0$ که از اینجا با توجه به قضیهٔ (۲.۲.۴)، $\xi_0 \in H$ هست که $\langle T_{k^3}\xi_0, \xi_0\rangle \neq 0$. اما با توجه به قسمت نخست چون $k^3 \in P_A$، داریم $\langle T_{k^3}\xi, \xi\rangle \geq 0 \quad (\xi \in H)$. پس $\langle T_{k^3}\xi_0, \xi_0\rangle > 0$. حال اگر قرار می‌دهیم $\xi_1 = T_k\xi_0$، آنگاه

$$< T_k\xi_1, \xi_1 >=< T_{k^2}\xi_0, T_k\xi_0 >=< T_{k^3}\xi_0, \xi_0 >> 0$$

امّا $T_h\xi_1 = T_{hk}\xi_0 = 0$. بنابراین

$$< T_a\xi_1, \xi_1 >=< T_{h-k}\xi_1, \xi_1 >= - < T_k\xi_1, \xi_1 >< 0$$

که این یک تناقض است. بنابراین داریم

$$k = 0 \qquad , \qquad a = h - k = h \in P_A$$

□

بلاخره این بخش را با قضیه‌ی زیر که دارای کاربردهایی در نظریه‌ی جبرهای فون–نویمن است به پایان می‌رسانیم.

قضیه ۴.۵.۴ B^* – جبر A واحددار است اگر و تنها اگر گوی واحد بستهٔ آن $K = \{x \in A : \|x\| \leq 1\}$ دارای نقطه‌ی اکسترمال (غائی) باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم A دارای واحد e باشد. می‌توان فرض کرد که $A \neq 0$. گیریم $e = \frac{1}{2}(x+y)$ که در آن $x, y \in K$. باید نشان دهیم $x = y = e$. قرار می‌دهیم $u = \frac{1}{2}(x+x^*)$ و $v = \frac{1}{2}(y+y^*)$. داریم $u^* = u$، $v^* = v$ و $e = \frac{1}{2}(u+v)$. چون $u = 2e - v$ پس $uv = vu$ و بنابراین $A_0 = \overline{[e,u,v]}$ یک زیرB^* – جبرجابجایی است. بنا به قضیه‌ی گلفاند – نیمارک داریم $A_0 \cong C(\mathfrak{M}(A_0))$ بطور $*$– ایزومورفیسم ایزومتری. نشان خواهیم داد که $\hat{u} = \hat{v} = 1$، و لذا $u = v = e$ داریم

$$\|\hat{u}\|_\infty = \|u\| \leq 1 \qquad , \qquad \|\hat{v}\|_\infty = \|v\| \leq 1$$

چون u, v هرمیتی هستند $\hat{u}, \hat{v}$ توابعی حقیقی‌اند و لذا $\hat{u} \leq \|\hat{u}\|_\infty \leq 1$ و $\hat{v} \leq \|\hat{v}\| \leq 1$. اگر $f_0 \in \mathfrak{M}(A_0)$ باشد که $\hat{u}(f_0) < 1$، آنگاه

$$1 = \hat{e}(f_0) = \frac{1}{2}(\hat{u}(f_0) + \hat{v}(f_0)) < 1$$

که این یک تناقض است. بنابراین $\hat{u} = 1$، و لذا $u = e$ و $x^* = 2u - x = 2e - x$. پس $xx^* = x^*x$. اکنون $A_1 = \overline{[e,x,x^*]}$ یک زیرB^*–جبر جابجایی است و لذا تحت نگاشت گلفاند $A_1 = C(\mathfrak{M}(A_1))$ بطور $*$–ایزومورفیسم ایزومتری. بنابراین به ازای هر $f \in \mathfrak{M}(A_1)$

$$1 = \hat{e}(f) = \frac{\hat{x}(f) + \widehat{(x^*)}(f)}{2} = \frac{\hat{x}(f) + \overline{\hat{x}(f)}}{2} = Re\hat{x}(f) \leq |\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\| \leq 1$$

و لذا $Re\hat{x}(f) = 1$. حال چون

$$1 = Re\hat{x}(f) \leq \sqrt{[Re\hat{x}(f)]^2 + [Im\hat{x}(f)]^2} = |\hat{x}(f)| \leq \|\hat{x}\|_\infty \leq \|x\| \leq 1$$

داریم $Im\hat{x}(f) = 0$ و لذا

$$\hat{x}(f) = Re\hat{x}(f) = 1 \qquad (f \in \mathfrak{M}(A_1))$$

بنابراین $\hat{e}=1=\hat{x}$ و یا $x=e$. به تقارن داریم $y=e$ و لذا e یک نقطه‌ی اکسترمال K است.

برای اثبات عکس قضیه ابتدا لم‌های زیر را ثابت می‌کنیم.

لم ۵.۵.۴ اگر در B^*- جبر A، نقطهٔ x یک نقطه‌ی اکسترمال $K=\{x\in A:\|x\|\leq 1\}$ باشد آنگاه x^*x و xx^* تصویر می‌باشند.

برهان. می‌توان فرض کرد که $x\neq 0$. اگر A واحددار باشد قرار دهید $A_0=\overline{[e,x^*x]}$ و اگر A واحددار نباشد قرار دهید $A_0=\overline{[x^*x]}$. چون x^*x هرمیتی است، A_0 یک زیر B^*- جبر جابجایی است و لذا بنابر قضیه‌ی گلفاند $-$ نیمارک در حالت اوّل با $C(\mathfrak{M}(A_0))$ و در حالت دوّم با $C_0(\mathfrak{M}(A_0))$ بطور ایزومتری $*-$ایزومورفیک است. در هر حالت دنباله‌ی y_n از عناصر هرمیتی در A_0 هست که $\|y_n\|\leq 1$، $y_nx^*x\longrightarrow x^*x$ و $y_n^2x^*x\longrightarrow x^*x$.

توضیح. اگر A واحددار باشد قرار دهید $y_n=e$. گیریم A واحددار نباشد. ابتدا نشان می‌دهیم $\mathfrak{M}(A_0)\neq\varnothing$. اگر $A_0'=\overline{[(1,0),(x^*x,0)]}$ آنگاه A_0' یک زیر B^*- جبر واحددار در B^*- جبر $A_1=A\oplus\{\lambda e\}$ با نرم $\|\ell_{(x,\lambda)}\|=|||(x,\lambda)|||$ می‌باشد و

$$0\leq\sigma_{A_1}=\sigma_{A_0'}[(x,0)^*(x,0)]=\{f'((x,0)^*(x,0)):f'\in\mathfrak{M}(A_0')\}$$

لذا $f_0'\in\mathfrak{M}(A_0')$ هست که

$$f_0'(x^*x,0)=f_0'((x,0)^*(x,0))=\rho_{A_0'}((x,0)^*(x,0))=\rho_{A_0'}(x^*x,0)=|||(x^*x,0)|||=\|x^*x\|=\|x\|^2>0$$

اکنون اگر قرار دهیم

$$f_0(z)=f_0'(z,0)\qquad(z\in A_0)$$

آنگاه به وضوح $f_0\in\mathfrak{M}(A_0)\neq\phi$. اکنون بنا به قضیه‌ی گلفاند$-$ نیمارک $A_0\cong C_0(\mathfrak{M}(A_0))$ بطور $*-$ایزومورفیسم ایزومتری. مجموعه‌های فشرده‌ی

$$K_n=\{f\in\mathfrak{M}(A_0):|f(x^*x)|\geq\frac{1}{n}\}\qquad(n=1,2,\cdots)$$

را در نظر می‌گیریم . بنا به لم اریزون $y_n\in A_0$ هست که $K_n\prec\hat{y}_n$ (رجوع شود به آنالیز حقیقی و مختلط رودین).

داریم $\|\hat{y}_n\widehat{(x^*x)}-\widehat{(x^*x)}\|_\infty<\frac{1}{n}$ و $\|\hat{y}_n^2\widehat{(x^*x)}-\widehat{(x^*x)}\|_\infty<\frac{1}{n}$ و لذا

$$\|y_n(x^*x)-(x^*x)\|<\frac{1}{n}\to 0 \qquad , \qquad \|y_n^2(x^*x)-(x^*x)\|<\frac{1}{n^2}\to 0$$

چون $0\le\hat{y}_n\le 1$ حقیقی هستند لذا $y_n\in A_0$ها هرمیتی می‌باشند. $\star$

به وضوح عضو x^*x یک تصویر است هر گاه برد $\widehat{(x^*x)}$ زیر مجموعه‌ی $\{0,1\}$ باشد. چون $\sigma_{A_0}(x^*x)\ge 0$ و $\|\widehat{x^*x}\|_\infty=\|x^*x\|=\|x\|^2\le 1$، لذا برد $\widehat{(x^*x)}$ زیر مجموعه‌ی $[0,1]$ است. گیریم $0<t<1$ و $f\in\mathfrak{M}(A_0)$ بطوری که $\widehat{(x^*x)}(f_0)=t$ (فرض خلف). بنابراین عضو هرمیتی $a\in A_0$ هست بطوری که $\hat{a}(f_0>0)$،

$$\|(y_n-a)^2(x^*x)\|\le 1 \qquad , \qquad \|(y_n+a)^2(x^*x)\|\le 1$$

توضیح. داریم

$$\underbrace{\{f_0\}}_{\text{فشرده}}\subseteq\{f\in\mathfrak{M}(A_0):\widehat{(x^*x)}(f)<\frac{1+t}{2}\}=\underbrace{U}_{\text{باز}}$$

بنابراین $b\in A_0$ هست که $\{f_0\}\prec\hat{b}\prec U$. قرار می‌دهیم $a=(\sqrt{\frac{2}{1+t}}-1)b$. به ازای هر $f\in\mathfrak{M}(A_0)$ داریم

$$I:\qquad f\notin\operatorname{supp}(\hat{b})\implies|\hat{y}_n(f)\pm\hat{a}(f)|^2|\widehat{(x^*x)}(f)|=|\hat{y}_n(f)|^2|\widehat{(x^*x)}(f)|\le 1 \tag{۱}$$

$$f\in\operatorname{supp}(\hat{b})\implies|\hat{y}_n(f)\pm\hat{a}(f)|^2|\widehat{(x^*x)}(f)|\le(1+\sqrt{\frac{2}{1+t}}-1)^2\frac{1+t}{2}=1 \tag{۲}$$

زیرا $\|\hat{b}\|_\infty=1$. بنابراین

$$1\ge\|(y_n\pm a)^2x^*x\|=\|(y_n\pm a)x^*x(y_n\pm a)\|=\|[x(y_n\pm a)]^*[x(y_n\pm a)]\|=\|x(y_n\pm a)\|^2$$

و لذا $x(y_n\pm a)\in K$. از طرف دیگر با توجه به انتخاب y_nها و اینکه A_0 جابجایی است، داریم

$$\begin{aligned}\|xy_n-x\|^2&=\|(xy_n-x)^*(xy_n-x)\|=\|(y_nx^*-x^*)(xy_n-x)\|\\&=\|y_nx^*xy_n-y_nx^*x-x^*xy_n+x^*x\|\\&=\|y_n^2x^*x-2y_nx^*x+x^*x\|\longrightarrow 0\qquad(n\to\infty)\end{aligned}$$

$\star$

و لذا $x\pm xa\longrightarrow x(y_n\pm a)$. بنابراین $x\pm xa\in K$. حال چون $x=\frac{1}{2}[(x+xa)+(x-xa)]$ و x یک نقطه‌ی اکسترمال K است، داریم $x=x+xa=x-xa$. پس $xa=0$ و لذا $x^*xa=0$ و $\widehat{(x^*x)}\hat{a}=0$ که این یک

تناقض است زیرا $\widehat{(x^*x)}(f_0) = t > 0$ و $\hat{a}(f_0) > 0$. بنابراین x^*x یک تصویر است. در مورد xx^*، چون x یک نقطهٔ اکسترمال K است لذا x^* نیز چنین است، و در نتیجه بنا به حالت فوق $xx^* = (x^*)^*x^*$ یک تصویر است.

$\square$

لم ۶.۵.۴ اگر در B^*–جبر A، x یک نقطه‌ی اکسترمال $K = \{x : ||x|| \leq 1\}$ باشد آنگاه اگر

$$B := (1 - xx^*)A(1 - x^*x)$$

داریم $B = 0$. (در اینجا $(1-a)b$ و $b(1-a)$، $b - ab$ و $b - ba$ می‌باشند)

برهان. گیریم $a \in B$. باید نشان دهیم $a = 0$. می‌توان فرض کرد که $\|a\| < 1$. داریم

$$\|(x \pm a)\|^2 = \|(x \pm a)^*(x \pm a)\| = \|x^*x + a^*a \pm (x^*a + a^*x)\| \qquad (۱)$$

چون $a = (1 - xx^*)y(1 - x^*x)$ به ازای یک $y \in A$، بنا به لم (۵.۷.۳)

$$xx^*a = (xx^* - xx^*)y(1 - x^*x) = 0$$

بنابراین $a^*xx^*a = 0$ و

$$\|x^*a\|^2 = \|(x^*a)^*(x^*a)\| = \|a^*xx^*a\| = 0$$

لذا $x^*a = 0$ و$a^*x = (x^*a)^* = 0$. پس (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\|x \pm a\|^2 = \|x^*x + a^*a\| \qquad (۲)$$

بنا به قضیه‌ی گلفاند– نیمارک عناصر x^*x و a^*a را می‌توان به عنوان عملگرهای P و T بر یک فضای هیلبرت H در نظر گرفت که P یک تصویر است. به علاوه، داریم $PT = TP = 0$، زیرا

$$a^*ax^*x = a^*(ax^*x) = a^*(1 - xx^*)y(x^*x - x^*x) = 0$$

و

$$x^*xa^*a = (a^*ax^*x)^* = 0$$

به علاوه $\|P\| \leq 1$ و $\|T\| \leq 1$. (زیرا $\|P\| = \|x^*x\| = \|x\|^2 \leq 1$ و به همین ترتیب $\|T\| = \|a^*a\| = \|a\|^2 \leq$ 1). اگر قرار دهیم $H_1 = PH$ و $H_2 = H_1^{\perp}$. در این صورت هر عضو $\xi \in H$ به صورت منحصربفرد $\xi = \xi_1 + \xi_2$ نوشته می‌شود که در آن $\xi_1 \in H_1$ و $p\xi_2 = 0$.

توضیح. $H_1 = PH$ بسته است زیرا اگر $\eta_n, \eta \in H$ و $P\eta_n \longrightarrow \eta$ آنگاه $P\eta_n = P^2\eta_n \longrightarrow P\eta$ و لذا $\eta = P\eta \in H_1$. پس $H = H_1 \oplus H_1^{\perp} = H_1 \oplus H_2$ و هر عضو $\xi \in H$ به صورت منحصربفرد $\xi = \xi_1 + \xi_2$ نوشته می‌شود که در آن $\xi_1 \in H_1$ و $\xi_2 \in H_2$. چون $\xi = P\xi + (\xi - P\xi)$ و $P\xi \in H_1$ و از آنجا که به ازای هر $\eta \in H$،

$$\begin{aligned} <\xi - P\xi, P\eta> &= <\xi, P\eta> - <P\xi, P\eta>=<\xi, P\eta> - <\xi, P^*P\eta> \\ &= <\xi, P\eta> - <\xi, P^2\eta>= 0 \end{aligned}$$

$\xi - P\xi \in H_1^{\perp}$، داریم $\xi_1 = P\xi$ و $\xi_2 = \xi - P\xi$، و لذا $P\xi_2 = P\xi - P^2\xi = 0$. ⋆

بنابراین $T\xi_2 = (I-P)T\xi_2 \in H_2$ و $T\xi_1 = TP\xi_1 = 0$. پس به ازای هر $\xi \in H$، داریم

$$\begin{aligned} \|(p+T)\xi\|^2 &= \|P\xi_1 + T\xi_2\|^2 = \|P\xi_1\|^2 + \|T\xi_2\|^2 \\ &\leq \|P\|^2\|\xi_1\|^2 + \|T\|^2\|\xi_2\|^2 \leq \|\xi_1\|^2 + \|\xi_2\|^2 = \|\xi\|^2 \end{aligned}$$

و لذا $\|P + T\| \leq 1$ و $\|x^*x + a^*a\| \leq 1$. پس از (۲) نتیجه می‌شود که $x \pm a \in K$. حال چون $x = \frac{1}{2}[(x+a) + (x-a)]$ یک نقطه‌ی اکسترمال K است، داریم $x = x + a = x - a$، ویا $a = 0$. □

لم ۷.۵.۴ اگر A یک B^*−جبر و x, y عناصری مثبت از A باشند آنگاه $\|x\| \leq \|x+y\|$.

برهان. با توجه به قضیه‌ی (۵.۴.۴) $x + y$ نیز عنصری مثبت از A است. حال با توجه به قضیه‌ی نمایش گلفاند گیریم $T : A \to B(H)$ یک $*$−ایزومورفیسم ایزومتری از A بتوی $B(H)$ باشد. بنابه قضیه‌ی (۳.۵.۴) T_x وT_{x+y} وT_y عملگرهای مثبت می‌باشند. پس به ازای هر $\xi \in H$ که $\|\xi\| \leq 1$، آنگاه

$$\|x+y\| \geq | <T_{x+y}\xi, \xi> | =<T_{x+y}, \xi>=<T_x\xi, \xi> + <T_y\xi, \xi>\geq<T_x\xi, \xi>$$

اما بنا به لم (۹.۴.۴)، داریم $x = u^*u$ که در آن u عنصری هرمیتی از A است. پس

$$\begin{aligned} \|x+y\| \geq \sup_{\|\xi\| \leq 1} <T_x\xi, \xi> &= \sup_{\|\xi\| \leq 1} <T_u\xi, T_u\xi>= \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T_u\xi\|^2 = \sup_{\|\xi\| \leq 1} \|T_u\xi\|]^2 \\ &= \|T_u\|^2 = \|u\|^2 = \|u^*u\| = \|x\| \end{aligned}$$

و لذا حکم ثابت است. $\square$

لم ۸.۵.۴ گیریم A یک B^*–جبر و $x_1, x_2, \cdots, x_m \in A$ باشند. در این صورت دنباله‌ی (d_n) از عناصر مثبت در A هست که

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_k d_n = \lim_{n\longrightarrow\infty} d_n x_k = x_k \qquad (k = 1, 2, \cdots, m)$$

برهان. می‌توان فرض کرد که حداقل یک $x_i \neq 0$ وجود دارد (در غیر این صورت مثلاً بگیرید $(n = 1, 2, \cdots) \quad d_n = 0$). قرار می‌دهیم

$$h = x_1^* x_1 + ... + x_m^* x_m + x_{m+1}^* x_{m+1} + ... + x_{2m}^* x_{2m}$$

که در آن $(i = 1, 2, \cdots, m) \quad x_{m+i} = x_i^*$. با توجه به قضایای خوانده شده h عنصری مثبت است. همچنین با توجه به لم (۷.۵.۴) $h \neq 0$. اگر A واحددار باشد بگیرید $A_0 = \overline{[e, h]}$، و اگر A واحددار نباشد بگیرید $A_0 = \overline{[h]}$. با توجه به قضیه‌ی گلفاند– نیمارک به ترتیب داریم $A_0 \cong C(\mathfrak{M}(A_0))$ یا $A_0 \cong C_0(\mathfrak{M}(A_0))$ بطور $*$– ایزومورفیسم ایزومتری. (داریم $h = u^* u$ که در آن $u \neq 0$. لذا اگر A واحددار نباشد نیز با توجه به توضیح داده شده $\mathfrak{M}(A_0) \neq \varnothing$). در هر دو حالت توابع $(n = 1, 2, \cdots) \quad \hat{d}_n = \frac{n\hat{h}}{1+n\hat{h}}$ تبدیل گلفاند عناصر هرمیتی و منحصربفرد $d_n \in A_0$ می‌باشند. نشان می‌دهیم که (d_n) در شرایط لم صدق می‌کند. داریم $(1 - d_n) h (1 - d_n) \in A_0$. به علاوه

$$\|(1 - d_n) h (1 - d_n)\| = \sup_{f \in \mathfrak{M}(A_0)} \frac{1}{n} \frac{n\hat{h}(f)}{[1 + n\hat{h}(f)]^2} \leq \frac{1}{4n}$$

زیرا تابع $\frac{t}{(1+t)^2}$ بر فاصله‌ی $t \geq 0$ از $\frac{1}{4}$ تجاوز نمی‌کند.

توضیح. زیرا برای $t \geq 0$،

$$\frac{t}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{4} \Longleftrightarrow (1+t)^2 \geq 4t \quad \Longleftrightarrow \quad (1-t)^2 \geq 0$$

$\star$

اما

$$(1 - d_n) h (1 - d_n) = (1 - d_n) \sum_{i=1}^{2n} x_i^* x_i (1 - d_n) = \sum_{i=1}^{2n} (1 - d_n) x_i^* x_i (1 - d_n) = u_k + v_k$$

که در آن

$$
\begin{aligned}
u_k &= \sum_{i\neq k}(1-d_n)x_i^*x_i(1-d_n) = \sum_{i\neq k}[x_i(1-d_n)]^*[x_i(1-d_n)] \\
v_k &= (1-d_n)x_k^*x_k(1-d_n) = [x_k(1-d_n)]^*[x_k(1-d_n)]
\end{aligned}
$$

عناصر u_k, v_k $(1 \leq k \leq 2m)$ لزوماً متعلق به A_0 نیستند ولی با توجه به قضایای قبل عناصر مثبتی در A می‌باشند. اکنون بنا به لم قبل برای هر $k = 1, 2, \cdots, 2m$،

$$
\begin{aligned}
\|x_k(1-d_n)\|^2 &= \|[x_k(1-d_n)]^*[x_k(1-d_n)]\| = \|v_k\| \\
&\leq \|u_k + v_k\| = \|(1-d_n)h(1-d_n)\| \leq \frac{1}{4n}
\end{aligned}
$$

پس $\lim_{n\to\infty} x_k d_n = x_k$ و $\lim_{n\to\infty} x_k^* d_n = x_k^*$ $(k = 1, \cdots, m)$. از رابطهٔ اخیر نیز نتیجه می‌شود که

$$
\lim_{n\to\infty} d_n x_k = \lim_{n\to\infty}(x_k^* d_n)^* = [\lim_{n\to\infty}(x_k^* d_n)]^* = x_k^{**} = x_k \qquad (k = 1, 2, ..., m)
$$

□

اثبات عکس قضیهٔ (۴.۵.۴): گیریم x_0 یک نقطه‌ی اکسترمال K باشد. ابتدا نشان می‌دهیم که برای هر مجموعه از عناصر $x_m, \cdots, x_1$ از A دنباله‌ی هرمیتی (d_n) که مطابق لم (۸.۵.۴) به نقاط $x_m, \cdots, x_1, x_0$ نظیر می‌شود در A همگراست. در واقع گیریم چنین نباشد (فرض خلف). پس دنباله‌ی صعودی (k_n) از اعداد طبیعی و عدد $\delta > 0$ موجود است بطوری که $\|d_{k_n} - d_{k_{n+1}}\| \geq \delta$.

توضیح. چون (d_n) کوشی نیست

$$\exists \delta > 0 \ \ \forall N \ \ \exists n \ \ (n > N, \|d_n - d_N\| \geq \delta)$$

$$k_1 := 1$$

$$N = k_1 \Longrightarrow \exists k_2 > k_1; \|d_{k_2} - d_{k_1}\| \geq \delta$$

$$N = k_2 \Longrightarrow \exists k_3 > k_2; \|d_{k_3} - d_{k_2}\| \geq \delta$$

$\star$

قرار می‌دهیم $z_n = \frac{d_{k_n} - d_{k_{n+1}}}{\|d_{k_n} - d_{k_{n+1}}\|}$. داریم $\|z_n\| = 1$ و

$$\lim z_n x_0 = \lim x_0 z_n = \lim x_0^* z_n = \lim z_n x_0^* = 0$$

بنابراین از آنجا که

$$y_n = (1 - x_0 x_0^*) z_n (1 - x_0^* x_0) = z_n - x_0 x_0^* z_n - z_n x_0^* x_0 + x_0 x_0^* z_n x_0^* x_0$$

داریم $(n \to \infty)$ $\lim \|y_n\| = \lim \|z_n\| = 1$. اما با توجه به لم (۶.۵.۴)، چون x_0 یک نقطه‌ی اکسترمال K است داریم $y_n = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ که این یک تناقض است. بلاخره نشان می‌دهیم که حد (d_n) به انتخاب مجموعه‌ی نقاط $x_1, \cdots, x_m$ بستگی ندارد. در واقع اگر (d_n) و (d'_n) دنباله‌های متناظر با $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$ و $\{x_0, y_1, \cdots, y_k\}$ مطابق با لم (۸.۵.۴) باشند و $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = e_1$ و $\lim\limits_{n \to \infty} d'_n = e_2$. قرار می‌دهیم $z = e_1 - e_2$. داریم $zx_0 = x_0 z = z x_0^* = x_0^* z = 0$ و لذا دوباره بنا به لم (۶.۵.۴)

$$z = z - x_0 x_0^* z - z x_0^* x_0 + x_0 x_0^* z x_0^* x_0 = (1 - x_0 x_0^*) z (1 - x_0^* x_0) \in B = \{0\}$$

اکنون $e = \lim\limits_{n \to \infty} d_n$ (که مثلاً (d_n) دنباله‌ی هرمیتی متناظر با $\{x_0\}$ مطابق لم مزبور باشد) واحد A است. $\square$

فصل پنجم

نظریهٔ طیفی جبرهای باناخ

۱.۵ انتگرال گیری توابع برداری – مقدار

تعریف ۱.۱.۵ گیریم μ یک اندازه مثبت یا مختلط بر فضای اندازه‌ی Q، X یک فضای باناخ و $f : Q \longrightarrow X$ تابعی از Q به توی X و $\Lambda f \in L^1(|\mu|)$ برای هر $\Lambda \in X^*$ باشد. حال اگر بردار $y \in X$ باشد بطوری که

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \qquad (\Lambda \in X^*)$$

آنگاه f را نسبت به μ انتگرال پذیر نامیده و قرار می‌دهیم:

$$\int_Q f d\mu = y$$

تبصره: لازم به ذکر است که حداکثر یک چنین y وجود دارد زیرا X^* نقاط X را جدا می‌کند (اگر $\Lambda y_1 = \int_Q \Lambda f d\mu = \Lambda y_2$ برای هر $\Lambda \in X^*$، آنگاه $y_1 = y_2$). بنابراین در صورت انتگرال پذیری f نسبت به μ خواهیم داشت

$$\Lambda(\int_Q f d\mu) = \int_Q (\Lambda f) d\mu \qquad (\Lambda \in X^*)$$

در نتیجه اساساً مسئله‌ی یگانگی وجود ندارد و فقط مسئله‌ی وجود مطرح است. وجود را فقط در حالت خاصی که Q یک فضای توپولوژیکی هاسدورف فشرده بوده و f پیوسته است ثابت خواهیم کرد. در این حالت $f(Q)$ نیز

فشرده است و بنا به مسئله‌ای در آنالیز تابعی $\overline{co}(f(Q))$ نیز فشرده خواهد بود.

یادآوری می‌کنیم که یک اندازه‌ی احتمال اندازه‌ی مثبتی است که اندازه‌ی فضا برابر با واحد است.

تمرین: نشان دهید اگر K زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از فضای باناخ X باشد آنگاه $\overline{co}(K)$ نیز فشرده است به علاوه اگر $X = \mathbb{R}^n$، آنگاه $co(K)$ فشرده است.

قضیه ۲.۱.۵ گیریم μ یک اندازه‌ی بورل احتمال بر فضای فشرده و هاسدورف Q بوده و X یک فضای باناخ باشد. حال اگر $f : Q \longrightarrow X$ پیوسته باشد آنگاه f نسبت به μ انتگرال پذیر بوده و داریم

$$\int_Q f d\mu \in \overline{co}(f(Q))$$

تبصره: لازم به ذکر است که اگر $v(\neq 0)$ یک اندازه‌ی مثبت و متناهی بورل بر Q باشد آنگاه $\mu = \frac{v}{v(Q)}$ یک اندازه‌ی احتمال بوده و لذا به غیر از بند آخر قضیه‌ی فوق برای v به جای μ برقرار است. (زیرا: $\Lambda y = \int_Q \Lambda f d\mu \Longrightarrow \Lambda(v(Q)y) = \int_Q (\Lambda f) dv$)

در حالت کلی اگر v یک اندازه‌ی مختلط بورل بر Q باشد آنگاه با توجه به تجزیه‌ی جردن v نتیجه می‌شود که f نسبت به v انتگرال پذیر است.

توضیح.

$$v = v_1 + iv_2 = v_1^+ - v_1^- + iv_2^+ - iv_2^-$$

به ازای هر $\Lambda \in X^*$، داریم

$$\int_Q |\Lambda f| d|v| \leq ||\Lambda f||_\infty ||v|| < \infty$$
$$\Lambda y_1 = \int_Q \Lambda f dv_1^+ \ , \ \Lambda y_2 = \int_Q \Lambda f dv_1^- \ , \ \Lambda y_3 = \int_Q \Lambda f dv_2^+ \ , \ \Lambda y_4 = \int_Q \Lambda f dv_2^-$$
$$\Lambda(y_1 - y_2 + iy_3 - iy_4) = \int_Q \Lambda f d(v_1^+ - v_1^- + iv_2^+ - iv_2^-) = \int_Q \Lambda f dv$$

$\star$

برهان. قرار می‌دهیم $H = co(f(Q))$. ابتدا X را یک فضای باناخ حقیقی می‌گیریم باید نشان دهیم که عضو $y \in \overline{H}$ هست بطوری که به ازای هر $\Lambda \in X^*$

$$\Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu \qquad (۱)$$

فرض می‌کنیم $L=\{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_n\}$ یک زیر مجموعه‌ی متناهی از X^* باشد. گیریم E_L مجموعه‌ی کلّیه‌ی $y\in\overline{H}$ باشد که برای هر $\Lambda\in L$ در (۱) صدق می‌کنند. هر E_L بسته می‌باشد و چون $\overline{H}$ فشرده است E_L فشرده است.

توضیح. گیریم $(y_n)\subseteq E_L$ و $y_n\longrightarrow y$. چون هر $y_n\in\overline{H}$ و $\overline{H}$ بسته است لذا $y\in\overline{H}$. حال به ازای هر $\Lambda\in L$ چون Λ پیوسته است داریم

$$\Lambda y=\lim_{n\longrightarrow\infty}\Lambda y_n=\int_Q(\Lambda f)d\mu$$

و لذا $y\in E_L$. ⋆

اگر هیچ E_L تهی نباشد گردایه‌ی کلیه‌ی E_Lها دارای خاصیت مقطع متناهی بوده ($E_{L_1}\cap\cdots\cap E_{L_k}=E_{L_1}\cup\cdots\cup E_{L_k}$) و لذا مقطع کلیه‌ی E_Lها ناتهی می‌باشد و هر y در آن به ازای هر $\Lambda\in X^*$ در رابطه‌ی (۱) صدق کرده در $\overline{H}$ واقع است. بنابراین کافی است ثابت کنیم $E_L\neq\phi$.

فرض کنیم $L=\{\Lambda_1,\cdots,\Lambda_n\}$ زیر مجموعه‌ای ناتهی و متناهی از X^* باشد. نگاشت

$$\begin{aligned}L=(\Lambda_1,\cdots,\Lambda_n):X&\longrightarrow\mathbb{R}^n\\ x&\longrightarrow(\Lambda_1x,...,\Lambda_nx)\end{aligned}$$

را در نظر گرفته و قرار می‌دهیم $K=L(f(Q))$. همچنین قرار می‌دهیم

$$m_i=\int_Q(\Lambda_if)d\mu\qquad(1\leq i\leq n)$$

نشان می‌دهیم که $m=(m_1,\cdots,m_n)$ در غلاف محدب K قرار دارد. برای این منظور فرض می‌کنیم $t=(t_1,\cdots,t_n)\in\mathbb{R}^n$ در $co(K)$ واقع نباشد. بنا به شکل دوم هندسی قضیه‌ی هان– باناخ اعداد حقیقی $c_n,\cdots,c_1$ هستند بطوری که

$$\sum_{i=1}^n c_iu_i<\sum_{i=1}^n c_it_i\qquad(u=(u_1,\cdots,u_n)\in K)$$

توضیح. هر تابعک خطی و محدود بر $\mathbb{R}^n$ به صورت

$$\varphi_c(u)=<c,u>=\sum_{i=1}^n c_iu_i\qquad(u=(u_1,\cdots,u_n)\in\mathbb{R}^n)$$

است که در آن $c=(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ ثابت است. ⋆

بنابراین

$$\sum_{i=1}^n c_i\Lambda_i(f(q))<\sum_{i=1}^n c_it_i\qquad(q\in Q)$$

که باانتگرال گیری خواهیم داشت

$$\sum_{i=1}^{n} c_i m_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_Q (\Lambda_i f) d\mu < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$$

زیرا $\mu(Q) = 1$. پس $t \neq m$، و لذا $m \in co(K) = co(L(f(Q)))$. بنابراین $q_1, \cdots, q_n \in Q$ و $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \geq 0$ با $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ هستند که

$$m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(f(q_i)) = L(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(q_i)) = Ly = (\Lambda_1 y, \cdots, \Lambda_n y)$$

که در آن $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(q_i) \in co(f(Q)) = H$. بنابراین

$$\Lambda_i y = m_i = \int_Q (\Lambda_i f) d\mu \qquad (1 \leq i \leq n)$$

و لذا $y \in E_L \neq \varnothing$. از اینجا حکم برای حالت حقیقی به دست می‌آید.

اکنون فرض می‌کنیم X یک فضای باناخ مختلط باشد. با در نظر گرفتن X به عنوان یک فضای باناخ حقیقی $y \in \overline{co}(f(Q))$ هست که به ازای هر تابعک خطی حقیقی محدود بر X مانند φ داریم

$$\varphi(y) = \int_Q \varphi(f) d\mu \qquad (۲)$$

گیریم Λ یک تابعک خطی مختلط محدود بر X باشد. داریم $\Lambda = (Re\Lambda) - i(Rei\Lambda)$ چون $Re\Lambda$ و $Re(i\Lambda)$ تابعک های خطی حقیقی و محدود بر X اند لذا با توجه به (۲) داریم

$$\begin{aligned} \Lambda y &= Re\Lambda y - i(Rei\Lambda y) = \int_Q (Re\Lambda)(f) d\mu - i \int_Q Rei\Lambda(f) d\mu \\ &= \int_Q (Re\Lambda - iRei\Lambda)(f) d\mu = \int_Q (\Lambda f) d\mu \end{aligned}$$

لذا $\int_Q f d\mu = y \in \overline{co}(f(Q))$ موجود و حکم ثابت است. □

قضیه ۳.۱.۵ گیریم Q یک فضای فشرده‌ی هاسدورف، X یک فضای باناخ، $f: Q \longrightarrow X$ پیوسته و μ یک اندازه‌ی مثبت بورل متناهی بر Q باشد. آنگاه

$$\left\| \int_Q f d\mu \right\| \leq \int_Q \|f\| d\mu$$

برهان. قرار دهید $y = \int_Q f d\mu$. بنا به یکی از نتایج قضیه‌ی هان– باناخ $\Lambda \in X^*$ هست که $\Lambda y = \|y\|$ و $|\Lambda x| \leq \|x\|$ برای هر $x \in X$. بلاخص،

$$|\Lambda f(s)| \leq \|f(s)\| \qquad (s \in Q)$$

و لذا با توجه به قضیه‌ی قبل

$$\|y\| = \Lambda y = \int_Q (\Lambda f) d\mu = \left| \int_Q \Lambda f d\mu \right| \leq \int_Q |\Lambda f| d\mu \leq \int_Q \|f\| d\mu$$

□

۲.۵ توابع هولومورفیک برداری– مقدار

تعریف ۱.۲.۵ گیریم Ω زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{C}$ بوده و X یک فضای باناخ مختلط باشد.

(a): گوییم تابع $f : \Omega \longrightarrow X$ بطور ضعیف در Ω هولومورفیک است هر گاه به ازای هر $\Lambda \in X^*$ ، Λf به مفهوم عادی هولومورفیک باشد.

(b): گوییم تابع $f : \Omega \longrightarrow X$ بطور قوی در Ω هولومورفیک است هرگاه به ازای هر $z \in \Omega$، حد زیر

$$\lim_{w \longrightarrow z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}$$

(نسبت به توپولوژی X) موجود باشد.

قابل ذکر است که کسر فوق حاصل ضرب اسکالر $(w - z)^{-1}$ در بردار $f(w) - f(z)$ در X بوده و لذا دارای معنی است. بنا به پیوستگی تابعک‌های Λ واضح است که هر تابع بطور قوی هولومورفیک بطور ضعیف نیز هولومورفیک است. عکس این مطلب نیز صحیح بوده ولی بدیهی نیست (به یاد آورید که دنباله‌های بطور ضعیف همگرا لزوماً بطور قوی همگرا نیستند).

بنابه تعریف شاخص نقطه‌ی $z \in \mathbb{C}$ نسبت به مسیر بسته (یک منحنی بسته‌ی بطور قطعه‌ای هموار در صفحه) Γ که از نقطه‌ی z عبور نکند عبارت است از

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\xi}{\xi - z}$$

قضیه ۲.۲.۵ گیریم Ω مجموعه‌ی بازی در $\mathbb{C}$ ، X یک فضای باناخ مختلط و $f:\Omega\longrightarrow X$ بطور ضعیف هولومورفیک باشد. در این صورت

(a): f بطور قوی (نسبت به توپولوژی نرم در X)بر Ω پیوسته است.

(b): قضیه‌ی کوشی و فرمول انتگرال کوشی برقرار است؛ اگر Γ یک مسیر بسته در Ω باشد بطوری که به ازای هر $w\notin\Omega$، $\mathrm{Ind}_\Gamma(w)=0$، آنگاه

$$\int_\Omega f(\xi)d\xi=0 \tag{۱}$$

و هر گاه $z\in\Omega$ و $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=1$، آنگاه

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\xi-z)^{-1}f(\xi)d\xi \tag{۲}$$

اگر Γ_1 و Γ_2 دو مسیر بسته در Ω بوده بطوری که به ازای هر $w\notin\Omega$،

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_1}(w)=\mathrm{Ind}_{\Gamma_2}(w)$$

آنگاه

$$\int_{\Gamma_1}f(\xi)d\xi=\int_{\Gamma_2}f(\xi)d\xi \tag{۳}$$

(c): f بطور قوی در Ω هولومورفیک است.

لازم به ذکر است که انتگرال های آمده در (b) به مفهوم انتگرال توابع برداری — مقدار هستند. هم می‌توان $d\xi$ را به عنوان یک اندازه‌ی مختلط بر برد Γ (زیر مجموعه‌ی فشرده‌ای از $\mathbb{C}$)در نظر گرفته و هم می‌توان Γ را پارامتری نموده و انتگرال را نسبت اندازه‌ی لبگ (بورل) بر یک بازه‌ی بسته از $\mathbb{R}$ در نظر گرفت (چرا؟)

توضیح. Γ' بطور قطعه‌ای پیوسته است.

$$\Gamma:[a,b]\longrightarrow\Omega \qquad\qquad \Gamma^*=\Gamma([a,b])$$

$$\mu(E)=\int_{\Gamma^{-1}(E)}\Gamma'(t)dt \qquad (\overbrace{E}^{\text{بورل}}\subseteq\Gamma^*)$$

$$\int_{\Gamma^*}fd\mu=\int_a^b\overbrace{f(\Gamma(t))}^{\text{باتوجه به } (a) \text{ پیوسته}}\Gamma'(t)dt$$

$\star$

برهان. (a): کافی است حالت $0 \in \Omega$ را در نظر گرفته و ثابت کنیم f در ۰ پیوسته است.

توضیح. $z_0 \in \Omega$ دلخواه،

$$f_1 : \Omega - \{z_0\} \longrightarrow X$$

$$f_1(z) = f(z + z_0) \qquad (z \in \Omega - \{z_0\})$$

به ازای هر $z \in \Omega - \{z_0\}$ و هر $\Lambda \in X^*$

$$\frac{\Lambda f_1(w) - \Lambda f_1(z)}{w - z} = \frac{\Lambda f(w + z_0) - \Lambda f(z + z_0)}{w - z} \to (\Lambda f)(z + z_0) \qquad (w \to z)$$

پس f_1 بر $\Omega - \{z_0\}$ بطور ضعیف هولومورفیک است. پس اگر در حالت فوق حکم برقرار باشد، داریم

$$f(z_0) = f_1(0) = \lim_{z \to 0} f_1(z) = \lim_{z \to 0} f_(z_+ z_0)$$

یعنی f در z_0 پیوسته است. $\star$

قرار می‌دهیم

$$\triangle_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\} \tag{۴}$$

$r > 0$ ای هست که $\triangle_{2r} \subseteq \Omega$. گیریم Γ مرز بطور مثبت جهت دار شده $\triangle_{2r}$ باشد؛ یعنی

$$\Gamma(\theta) = 2re^{i\theta} \qquad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

عضو دلخواه $\Lambda \in X^*$ را ثابت می‌گیریم. داریم

$$\begin{aligned} \frac{\Lambda f(z) - \Lambda f(0)}{z - 0} &= \frac{1}{2\pi iz}\left[\int_\Gamma \frac{\Lambda f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_\Gamma \frac{\Lambda f(\xi)}{\xi} d\xi\right] \\ &= \frac{1}{2\pi iz}\int_\Gamma \frac{z\Lambda f(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Lambda f(\xi)}{\xi(\xi - z)} d\xi \qquad (0 < |z| < 2r) \end{aligned}$$

گیریم

$$M(\Lambda) = \max_{\xi \in \triangle_{2r}} |\Lambda f(\xi)|$$

پس

$$\left|\frac{\Lambda f(z) - \Lambda f(0)}{z}\right| \leq \frac{1}{2\pi}.\frac{M(\Lambda)}{2r^2}.4\pi r = \frac{M(\Lambda)}{r} \qquad (0 < |z| < r)$$

زیرا در این حالت

$$|\xi - z| \geq |\xi| - |z| = 2r - |z| > r$$

بنابراین مجموعه‌ی

$$\left\{\frac{f(z)-f(0)}{z}: \quad 0<|z|<r\right\}$$

بطور ضعیف در X محدود بوده و لذا بنا به قضیه‌ی باناخ اشتاین- هاوس مجموعه‌ی فوق بطور قوی محدود می‌باشد؛ یعنی عدد ثابت $M>0$ هست که

$$|f(z)-f(0)| \leq M|z| \qquad (0<|z|<r)$$

و لذا f در ۰ پیوسته است.

(b): با توجه به (a) واضح است که انتگرال های (۱)، (۲) و (۳) موجودند. حال چون این فرمول ها با تعویض f با Λf که در آن $\Lambda \in X^*$ برقرارند برای f نیز برقرار می‌باشند.

(c): کافی است حالت $0 \in \Omega$ را در نظر گرفته و ثابت کنیم f در ۰ مشتق پذیر است.

توضیح. $z_0 \in \Omega$ دلخواه،

$$\begin{aligned} f_1: \Omega-\{z_0\} &\longrightarrow X \\ z &\rightarrow f(z+z_0) \end{aligned}$$

به مانند توضیح (a) نتیجه می‌شود که f_1 بر $\Omega-\{z_0\}$ بطور ضعیف هولومورفیک است. پس اگر حکم در حالت فوق برقرار باشد آنگاه

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z+z_0)-f(z_0)}{z}=\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f_1(z)-f_1(0)}{z}=f_1'(0)$$

موجود است. $\star$

گیریم $r>0$ چنان باشد که $\triangle_{2r} \subseteq \Omega$. Γ را مرز بطور مثبت جهت دار شده‌ی $\triangle_{2r}$ گرفته و قرار می‌دهیم

$$y=\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \xi^{-2} f(\xi) d\xi$$

با توجه به (b)، داریم

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(0)}{z} &= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi-\int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi} d\xi\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi(\xi-z)} d\xi=\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi^2} d\xi+\frac{z}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\xi)}{\xi^2(\xi-z)} d\xi \\ &= y+zg(z) \qquad (0<|z|<2r) \end{aligned}$$

که در آن

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi^2(\xi-z)}d\xi$$

بنابراین

$$\left\|\frac{f(z)-f(0)}{z}-y\right\|=\|zg(z)\|\leq|z|\frac{\max_{|\xi|=2r}\|f(\xi)\|}{4r^2(2r-|z|)}.4\pi r\leq(\frac{1}{r^2}\max_{|\xi|=2r}\|f(\xi)\|).|z| \qquad (0<|z|<r)$$

و لذا $\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=y$ موجود است. □

قضیه ۳.۲.۵ گیریم X یک فضای باناخ مختلط و $f:\mathbb{C}\longrightarrow X$ بطور ضعیف هولومورفیک باشد. حال اگر $f(\mathbb{C})$ بطور ضعیف (قوی) محدود باشد آنگاه f ثابت است.

برهان. به ازای هر $\Lambda\in X^*$، Λf یک تابع مختلط تام و محدود می‌باشد. پس بنا به قضیه‌ی لیوویل داریم

$$\Lambda f(z)=\Lambda f(0) \qquad (z\in\mathbb{C})$$

حال چون X^* نقاط X را جدا می‌کند داریم $f(z)=f(0)$ برای هر $z\in\mathbb{C}$. □

۳.۵ حسابان طیفی

در سرتاسر این بخش فرض می کنیم $A\neq 0$ یک جبر باناخ مختلط با واحد e باشد . اگر $f(\lambda)=\alpha_0+...+\alpha_n\lambda^n$ یک چندجمله‌ای با ضرایب مختلط α_i باشد آنگاه بدون ابهام $f(x)$ به صورت

$$f(x)=\alpha_0e+\alpha_1x+...+\alpha_nx^n$$

تعریف می‌شود. سئوالی که مطرح می‌شود این است که آیا می‌توان $f(x)$ را برای توابع دیگر نیز تعریف نمود بطور طبیعی این تعریف باید چنان باشد که اگر

$$f(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k$$

یک تابع تام باشد آنگاه $f(x)$ به صورت سری (مطلقاً) همگرای

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_kx^k$$

بوده، و اگر

$$f(\lambda) = \frac{1}{\alpha - \lambda} \qquad (\lambda \neq \alpha)$$

آنگاه

$$f(x) = (\alpha e - x)^{-1}$$

باشد، به شرطی که $\alpha \notin \sigma(x)$. برای با معنی بودن $f(x)$ حدسی که زده می‌شود این است که تابع f باید بر مجموعه‌ی بازی شامل $\sigma(x)$ تحلیلی باشد. نشان خواهیم داد که این حدس صحیح است و به کمک فرمول انتگرال کوشی توابع تحلیلی بر یک مجموعه‌ی باز به توابع $A-$ مقداری بر زیر مجموعه‌ی بازی از A تبدیل می‌شوند.

۴.۵ انتگرال گیری از توابع $A-$ مقداری

اگر f تابع A − مقداری پیوسته‌ای بر فضای فشرده و هاسدورف Q بوده و μ یک اندازه‌ی مختلط بورل بر Q باشد آنگاه از آنجا که A یک فضای باناخ است $\int_Q f d\mu$ موجود ودارای خواص مذکور می‌باشد. به علاوه، داریم

$$x \int_Q f d\mu = \int_Q x f(p) d\mu(p) \qquad (۱)$$

$$\left(\int_Q f d\mu)\right) x = \int_Q f(p) x d\mu(p) \qquad (۲)$$

برای اثبات (۱): گیریم $M_x : A \longrightarrow A$ با ضابطه‌ی $y \longrightarrow xy$ عملگر ضرب در x از چپ باشد. به ازای هر $\Lambda \in A^*$، $\Lambda M_x : A \longrightarrow \mathbb{C}$ یک تابعک خطی محدود بر A است. بنابراین

$$\Lambda M_x \left(\int_Q f d\mu\right) = \int_Q (\Lambda M_x f) d\mu = \Lambda \left(\int_Q (M_x f) d\mu\right)$$

و لذا خواهیم داشت $M_x \left(\int_Q f d\mu\right) = \int_Q (M_x f) d\mu$ که همان (۱) است. برای اثبات (۲) از عملگر راست − ضرب در x استفاده می‌کنیم.

یادآوری و تعریف: اگر a و b دو عدد مختلط باشند مسیر γ با ضابطه‌ی

$$\gamma(t) = a + (b-a)t \qquad (0 \leq t \leq 1)$$

را بازه‌ی جهت دار $[a, b]$ می‌نامند. طول آن برابر است با $|b-a|$ و داریم

$$\int_{[a,b]} f(z) dz = (b-a) \int_0^1 f[a + (b-a)t] dt \qquad (f \in C([a,b]))$$

گیریم $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ مسیرهایی در صفحه و $K = \gamma_1^* \cup ... \cup \gamma_n^*$ باشد. هر γ_i یک تابعک خطی $\tilde{\gamma_i}$ بر فضای برداری $C(K)$ به صورت زیر القا می‌کند

$$\tilde{\gamma_i}(f) = \int_{\gamma_i} f(z)dz$$

$\widetilde{\Gamma}$ را به صورت

$$\widetilde{\Gamma} = \tilde{\gamma_1} + ... + \tilde{\gamma_n} \tag{۱}$$

تعریف می‌کنیم. بطور صریح داریم $\widetilde{\Gamma}(f) = \tilde{\gamma_1}(f) + ... + \tilde{\gamma_n}(f)$ برای هر $f \in C(K)$. رابطه‌ی (۱) را به صورت صوری

$$\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$$

و یا بطور غیر دقیق $\Gamma = \{\gamma_1 \cup ... \cup \gamma_n\}$ نمایش داده و تعریف می‌کنیم

$$\int_\Gamma f(z)dz := \widetilde{\Gamma}(f) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f(z)dz \qquad (f \in C(K))$$

اکنون گیریم $K \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{C}$، K فشرده و Ω باز باشد. با توجه به قضیه‌ی (۵—۱۳) از کتاب آنالیز حقیقی و مختلط رودین می‌توان گردایه‌ی متناهی $\Gamma = \gamma_1 \dot{+} \cdots \dot{+} \gamma_n$ از بازه‌های $\gamma_1, ..., \gamma_n$ در Ω را چنان یافت که هیچ کدام K را قطع نکرده و

$$Ind_\Gamma(\xi) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\lambda}{\lambda - \xi} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_i} \frac{d\lambda}{\lambda - \xi} = \begin{cases} 1 & \xi \in K \\ 0 & \xi \notin \Omega \end{cases} \tag{۲}$$

که در این حالت فرمول انتگرال کوشی

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\lambda - \xi)^{-1} f(\lambda) d\lambda \qquad (f \in H(\Omega), \xi \in K)$$

برقرار است . حالت (۲) را به اختصار چنین توصیف می‌کنیم که کانتور Γ، مجموعه‌ی K را در Ω در بر گرفته است. لازم به ذکر است که نه K و نه Γ لزوماً مرتبط نیستند.

اگر ϕ تابع $A-$ مقداری پیوسته‌ای بر $\gamma_1^* \cup \cdots \cup \gamma_n^*$ باشد قرار می‌دهیم

$$\int_\Gamma \phi(\lambda)d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} \phi(\lambda)d\lambda$$

لم ۱.۴.۵ اگر $x \in A$، $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$، $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\alpha\}$ و Γ، $\sigma(x)$ را در Ω در بر گیرد آنگاه

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^n(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = (\alpha e - x)^n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \tag{۱}$$

برهان. انتگرال سمت چپ را به y_n نمایش می‌دهیم. اگر $\lambda \notin \sigma(x)$ آنگاه

$$\begin{aligned}(\lambda e - x)^{-1} &= (\alpha e - x)^{-1}[(\alpha-\lambda)e + \lambda e - x](\lambda e - x)^{-1}\\ &= (\alpha e - x)^{-1} + (\alpha - \lambda)(\alpha e - x)^{-1}(\lambda e - x)^{-1}\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}y_n &= \frac{1}{2\pi i}(\alpha e - x)^{-1}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^n d\lambda + (\alpha e - x)^{-1}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\alpha-\lambda)^{n+1}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda\\ &= (\alpha e - x)^{-1}y_{n+1} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)\end{aligned}$$

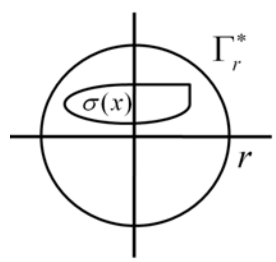
زیرا $Ind_{\Gamma}(\alpha) = 0$ (قضیه‌ی ۳۵ – ۱۰ از کتاب آنالیز حقیقی و مختلط رودین)، و یا

$$y_{n+1} = (\alpha e - x)y_n \qquad (n = 0, \pm 1, \pm, ...) \tag{۲}$$

رابطه‌ی تراجعی (۲) نشان می‌دهد که کافی است (۱) را فقط در حالت $n = 0$، یعنی رابطه‌ی زیر را ثابت کنیم:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\lambda - x)^{-1}d\lambda = e \tag{۳}$$

گیریم $(0 \leq t \leq 2\pi)$ $\Gamma_r(t) = re^{it}$ دایره‌ی جهت دار به مرکز ۰ و شعاع $r > \|x\|$ باشد.



$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}(\lambda e - x)^{-1}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^n d\lambda = e$$

توضیح. به ازای هر $\Lambda \in X^*$ داریم

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_r}\Lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}\right)d\lambda = \int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda x^n}{(re^{i\theta})^{n+1}}rie^{i\theta}d\theta &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{\Lambda x^n}{(re^{i\theta})^{n+1}}rie^{i\theta}d\theta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{\Lambda x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda\end{aligned}$$

زیرا از آنجا که

$$\left|\frac{(\Lambda x^n)rie^{i\theta}}{(re^{i\theta})^{n+1}}\right| = \frac{|\Lambda x^n|}{r^n} \leq \|\Lambda\| \left\|\frac{x}{r}\right\|^n$$

و $\|\frac{x}{r}\| < 1$ داریم $\sum_{n=0}^{\infty} \|\frac{x}{r}\|^n < \infty$ و لذا بنا به آزمون $M-$ وایرشتراس سری زیرانتگرال همگرای یکنواخت بوده و می‌توان جمله به جمله از آن انتگرال گرفت. اکنون چون

$$\begin{aligned}\Lambda\left(\int_{\Gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right) &= \int_{\Gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{\Lambda x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Lambda\left(\int_{\Gamma_r}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right) = \Lambda\left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda\right) \qquad (\Lambda \in X^*)\end{aligned}$$

داریم

$$\int_{\Gamma_r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{x^n}{\lambda^{n+1}}d\lambda$$

⋆

اما از آنجا که تابع زیرانتگرال در (۳) یک تابع $A-$ مقداری هولومورفیک بر $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ بوده و

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma_r}(\xi) = 1 = Ind_{\Gamma}(\xi) \qquad (\xi \in \sigma(x))$$

لذا بنا به قضیه‌ی (۲.۲.۴) مقدار انتگرال (۳)با تغییر Γ با Γ_r تغییر نکرده و حکم ثابت است. □

تعریف ۲.۴.۵ فرض کنید

$$R(\lambda) = P(\lambda) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{k_m} c_{m,k}(\lambda - \alpha_m)^{-k} \qquad (۱)$$

تابع گویایی با قطب های α_m باشد(P یک چند جمله‌ای است و k_m مرتبه‌ی قطب α_m است). اگر $x \in A$ و $\sigma(x)$ هیچ قطبی از R را شامل نباشد قرار می‌دهیم

$$R(x) = P(x) + \sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{k_m} c_{m,k}(x - \alpha_m e)^{-k} \qquad (۲)$$

قضیه ۳.۴.۵ گیریم $x \in A$ و تابع گویای R بر زیر مجموعه‌ی باز Ω از $\mathbb{C}$ شامل $\sigma(x)$ دارای هیچ قطب نباشد. حال اگر Γ، $\sigma(x)$ را در Ω در بر گیرد آنگاه

$$R(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\lambda)(\lambda e - x)^{-1}d\lambda \qquad (۳)$$

برهان. گیریم R به شکل (۱) باشد. $\alpha \notin \Omega$ را اختیار کرده و فرض می‌کنیم $P(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} c_n(\alpha-\lambda)^n$ باشد. با توجه به لم قبل داریم

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda &= \sum_{n=0}^{N} c_n.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\alpha-\lambda)^n(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \\
&\quad +\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{k_m} c_{m,k}.\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda-\alpha_m)^{-k}(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \\
&= \sum_{n=0}^{N} c_n(\alpha e-x)^n+\sum_{m=1}^{M}\sum_{k=1}^{k_m} c_{m,k}(x-\alpha_m e)^{-k} \\
&= R(x)
\end{aligned}$$

□

لم ۴.۴.۵ اگر Ω مجموعه‌ی بازی در $\mathbb{C}$ باشد آنگاه

$$A_\Omega = \{x \in A : \sigma(x) \subseteq \Omega\}$$

در A باز است.

برهان. گیریم $x \in A_\Omega$ دلخواه باشد. چون $\|(\lambda e-x)^{-1}\|$ تابع پیوسته‌ای از λ بر $\mathbb{C}\setminus\sigma(x)$ بوده و

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\| = \frac{\|(e-\frac{x}{\lambda})^{-1}\|}{|\lambda|} \longrightarrow \frac{1}{\infty}=0 \qquad (|\lambda|\longrightarrow\infty)$$

عدد $0<M<\infty$ هست که

$$\|(\lambda e-x)^{-1}\|<M \qquad (\lambda\notin\Omega)$$

حال اگر $y \in A$، $\|y\|<\frac{1}{M}$ و $\lambda\notin\Omega$، آنگاه

$$\lambda e-(x+y) = (\lambda e-x)[e-(\lambda e-x)^{-1}y]$$

در A معکوس پذیر است زیرا $\|(\lambda e-x)^{-1}y\|<1$، و بنابراین $\lambda\notin\sigma(x+y)$. پس گوی به مرکز x و شعاع $\frac{1}{M}$ مشمول در A_Ω بوده و حکم ثابت است. □

تعریف ۵.۴.۵ فرض کنیم Ω زیر مجموعه‌ی بازی از $\mathbb{C}$ و $H(\Omega)$ جبر کلیه‌ی توابع مختلط هولومورفیک در Ω باشد. بنا به لم فوق A_Ω باز است. به ازای هر $f \in H(\Omega)$ و هر $x \in A_\Omega$، فرض می‌کنیم

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}d\lambda \qquad (۱)$$

که در آن Γ کانتوری است که $\sigma(x)$ را در Ω در بردارد، و قرار می‌دهیم $\widetilde{H}(A_\Omega)=\{\tilde{f} : f\in H(\Omega)\}$.

در مورد این تعریف به چند نکته باید اشاره کرد:

(a): از آنجا که Γ خارج $\sigma(x)$ قرار دارد و تابع معکوس گیری پیوسته است لذا تابع زیر انتگرال در (۱) پیوسته بوده و در نتیجه انتگرال مزبور موجود و $\tilde{f}(x)$ را به عنوان عضوی از A تعریف می‌کند.

(b): تابع زیر انتگرال در (۱) یک تابع $A-$ مقداری هولومورفیک بر $\Omega \setminus \sigma(x)$ است. لذا قضیه‌ی کوشی نشان می‌دهد که $\tilde{f}(x)$ مستقل از انتخاب کانتور Γ است به شرطی که Γ، $\sigma(x)$ را در Ω در بر گیرد.

توضیح. اگر Γ_1 و Γ_2، $\sigma(x)$ را در Ω در بر گیرند آنگاه از آنجا که

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(w) = \operatorname{Ind}_{\Gamma_2}(w) \qquad (w \notin \Omega \backslash \sigma(x))$$

داریم

$$\int_{\Gamma_1} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \int_{\Gamma_2} f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda$$

$\star$

(c): اگر $x = \alpha e$ و $\alpha \in \Omega$ آنگاه $\sigma(x) = \{\alpha\} \subseteq \Omega$ و در نتیجه

$$\tilde{f}(\alpha e) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda e - \alpha e)^{-1} d\lambda = e.\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\lambda)(\lambda - \alpha)^{-1} d\lambda = f(\alpha) e \qquad (۲)$$

لازم به ذکر است که $\alpha e \in A_\Omega$ اگر و فقط اگر $\alpha \in \Omega$. حال با توجه به نگاشت یک به یک $A \longrightarrow \mathbb{C}$ با ضابطه‌ی $\lambda \longrightarrow \lambda e$، اگر $\lambda \in \mathbb{C}$ را با $\lambda e \in A$ یکی بگیریم هر $f \in H(\Omega)$ را می‌توان به عنوان نگاشتی بر زیر مجموعه‌ی $A_\Omega \cap < e > = \{\alpha e : \alpha \in \Omega\}$ از A_Ω به توی A در نظر گرفت و لذا می‌توان $\tilde{f}$ را به عنوان توسیعی از f قلمداد کرد.

(d): اگر $S \neq \phi$ یک مجموعه و A یک جبر باشد گردایه‌ی کلیه‌ی توابع $A-$ مقداری بر S با اعمال جمع وضرب اسکالر و ضرب نقطه‌وار یک جبر است. به عنوان مثال، اگر u, v نگاشت‌هایی از S به توی A باشند، آنگاه

$$(uv)(s) = u(s)v(s) \qquad (s \in S)$$

قضیه ۶.۴.۵ گیریم $H(\Omega)$ و $\widetilde{H}(A_\Omega)$ به شکل فوق باشند. در این صورت $\widetilde{H}(A_\Omega)$ یک جبر مختلط بوده و نگاشت $f \longrightarrow \tilde{f}$ یک ایزومورفیسم جبری از $H(\Omega)$ بروی $\widetilde{H}(A_\Omega)$ است که به مفهوم زیر پیوسته است:

اگر $f_n \in H(\Omega) \;\; (n = 1, 2, \cdots)$ و $f_n \to$ بطور یکنواخت بر زیر مجموعه‌های فشرده‌ی Ω، آنگاه

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \to \infty} \tilde{f}_n(x) \qquad (x \in A_\Omega) \qquad (۳)$$

اگر $u(\lambda)=\lambda$ و $v(\lambda)=1$ بر Ω، آنگاه به ازای هر $x\in A_\Omega$ داریم $\tilde{u}(x)=x$ و $\tilde{v}(x)=e$.

برهان. قسمت آخر از قضیه‌ی ما قبل به دست می‌آید . نمایش انتگرالی (۱) از تعریف قبل نشان می‌دهد که $f\longrightarrow\tilde{f}$ خطی است. اگر $\tilde{f}=0$ ، آنگاه

$$f(\alpha)e=\tilde{f}(\alpha e)=0 \qquad (\alpha\in\Omega)$$

و لذا $f=0$. بنابراین $f\longrightarrow\tilde{f}$ یک به یک است.

برای اثبات پیوستگی فرض می‌کنیم کانتور Γ، $\sigma(x)$ را در Ω در بر گرفته و $x\in A_\Omega$. داریم

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}(x)-\tilde{f}_n(x)\| &= \frac{1}{2\pi}\left\|\int_\Gamma [f(\lambda)-f_n(\lambda)](\lambda e-x)^{-1}d\lambda\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^m\left\|\int_{\gamma_i}[f(\lambda)-f_n(\lambda)](\lambda e-x)^{-1}d\lambda\right\| \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^m\left\|\int_{a_i}^{b_i} g_n(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)dt\right\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^m\int_{a_i}^{b_i}\|g_n(\gamma_i(t))\||\gamma_i'(t)|dt \\
&\leq \frac{M}{2\pi}\max_{\lambda\in\Gamma^*}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\sum_{i=1}^m L(\gamma_i)\to 0 \qquad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

که در آن $M=\max_{\lambda\in\Gamma^*}\|(\lambda e-x)^{-1}\|$ و $\Gamma=\gamma_1\dot{+}\cdots\dot{+}\gamma_m$ بوده و به ازای هر i، $[a_i,b_i]$ بازه‌ی پارامتری γ_i است. باقی است ثابت کنیم $f\to\tilde{f}$ ضربی است. به عبارت دیگر اگر $f\in H(\Omega)$، $g\in H(\Omega)$ و $h(\lambda)=f(\lambda)g(\lambda)$، باید نشان دهیم

$$\tilde{h}(x)=\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) \qquad (x\in A_\Omega)$$

اگر g,f توابع گویای بدون قطب در Ω باشند آنگاه داریم

$$\tilde{h}(x)=h(x)=f(x)g(x)=\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

در حالت کلی بنا به قضیه‌ی رانگ [۱] دنباله‌های $\{f_n\}$ و $\{g_n\}$ از توابع گویا و بدون قطب در Ω موجودند بطوری که بر زیر مجموعه‌های فشرده‌ی Ω ، $f_n\to f$ و $g_n\to g$ بطور یکنواخت. اکنون بطور یکنواخت بر زیر

[۱] Runge

مجموعه‌های فشرده‌ی Ω، $f_n g_n \to h$ و لذا بنا به پیوستگی تابع $\tilde{f}$ $f \to$ داریم

$$\tilde{h}(x) = \lim_{n\to\infty} (f_n g_n\tilde{)}(x) = \lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x). \lim_{n\to\infty} \tilde{g}_n(x) = \tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$$

قابل ذکر است که $\widetilde{H}(A_\Omega)$ یک جبر جابجایی است زیرا $H(\Omega)$ جابجایی است. $\square$

قضیه ۷.۴.۵ فرض کنیم $x \in A_\Omega$ و $f \in H(\Omega)$. در این صورت

(a): $\tilde{f}(x)$ در A معکوس پذیر است اگر وتنها اگر به ازای هر $\lambda \in \sigma(x)$، $f(\lambda) \neq 0$.

(b): $\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$.

قسمت b را قضیه‌ی نگاشت طیفی [۲] می گویند.

برهان. (a): اگر f دارای هیچ صفری بر $\sigma(x)$ نباشد، آنگاه در یک مجموعه‌ی باز Ω_1 که $\sigma(x) \subseteq \Omega_1 \subseteq \Omega$ تابع $g = \frac{1}{f}$ هولومورفیک است.

توضیح. به ازای هر $\lambda \in \sigma(x)$ ، همسایگی $U_\lambda \subseteq \Omega$ از λ هست که به ازای هر $\alpha \in U_\lambda$ ، $f(\alpha) \neq 0$.

$$\sigma(x) \subseteq \bigcup_{\lambda\in\sigma(x)} U_\lambda \overset{\text{فشرده } \sigma(x)}{\Longrightarrow} \sigma(x) \subseteq U_{\lambda_1} \cup \cdots \cup U_{\lambda_n} := \Omega_1 \qquad (\exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \sigma(x))$$

$\star$

چون بر Ω_1 داریم $fg = 1$ ، قضیه‌ی قبل (با Ω_1 به جای Ω) نشان می‌دهد که $\tilde{f}(x)\tilde{g}(x) = e$ و لذا $\tilde{f}(x)$ معکوس پذیر است.

بالعکس اگر به ازای یک $\alpha \in \sigma(x)$ ، $f(\alpha) = 0$ آنگاه تابع $h \in H(\Omega)$ هست که

$$(\lambda - \alpha)h(\lambda) = f(\lambda) \qquad (\lambda \in \Omega)$$

توضیح. به وضوح h در نقاط $\alpha \neq \lambda \in \Omega$، مشتق پذیر است. در یک همسایگی از نقطه‌ی α داریم

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(\lambda - \alpha)^k = (\lambda - \alpha)\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(\lambda - \alpha)^{k-1}$$

و لذا $h(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k+1)}(\alpha)}{(k+1)!}(\lambda - \alpha)^k$ و $h'(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{2!}$ موجود است. $\star$

بنابراین

$$(x - \alpha e)\tilde{h}(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{h}(x)(x - \alpha e)$$

[۲] spectral mapping theorem

حال چون $x-\alpha e$ در A معکوس پذیر نیست، $\tilde{f}(x)$ نیز معکوس پذیر نمی‌باشد.

(b): گیریم $\beta \in \mathbb{C}$. داریم

$$\begin{aligned}
\beta \in \sigma(\tilde{f}(x)) \quad &\Longleftrightarrow \quad \tilde{f}(x) - \beta e \notin G(A) \Longleftrightarrow (f-\tilde{\beta})(x) \notin G(A) \\
&\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \quad f(\lambda) - \beta = 0 \quad (\exists \lambda \in \sigma(x)) \Longleftrightarrow \beta = f(\lambda) \quad (\exists \lambda \in \sigma(x)) \\
&\Longleftrightarrow \quad \beta \in f(\sigma(x))
\end{aligned}$$

واز این جا حکم به دست می‌آید. $\square$

قضیه ۸.۴.۵ گیریم $x \in A_\Omega$، $f \in H(\Omega)$، Ω_1 مجموعه‌ی بازی شامل $f(\sigma(x)) = \sigma(\tilde{f}(x))$، $g \in H(\Omega_1)$، $\Omega_0 = f^{-1}(\Omega_1)$ و $h(\lambda) = g(f(\lambda))$.

در این صورت $\tilde{f}(x) \in A_{\Omega_1}$ و $\tilde{h}(x) = \tilde{g}(\tilde{f}(x))$.

به اختصار، اگر $h = g \circ f$ آنگاه $\tilde{h} = \tilde{g} \circ \tilde{f}$.

برهان. بنا به (b) از قضیه‌ی قبل داریم

$$\sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x)) \subseteq f(\Omega_0) \subseteq \Omega_1$$

و لذا $\tilde{f}(x) \in A_{\Omega_1}$ و $\tilde{g}(\tilde{f}(x))$ قابل تعریف است.

کانتور Γ_1 را چنان اختیار می‌کنیم که $f(\sigma(x))$ را در Ω_1 را در بر گیرد. مجموعه‌ی باز W هست که $\sigma(x) \subseteq W \subseteq \Omega_0$ و

$$Ind_{\Gamma_1}(f(\lambda)) = 1 \qquad (\lambda \in W) \tag{۱}$$

کانتور Γ_0 را چنان می‌گیریم که $\sigma(x)$ را در W در بر گیرد. اگر $\zeta \in \Gamma_1$ آنگاه $\frac{1}{\zeta - f} \in H(W)$. بنابراین بنا به قضیه‌ی (۶.۴.۵) با W به جای Ω داریم

$$[\zeta e - \tilde{f}(x)]^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} [\zeta - f(\lambda)]^{-1}(\lambda e - x)^{-1} d\lambda \qquad (\zeta \in \Gamma_1) \tag{۲}$$

از آنجا که Γ_1، $\sigma(\tilde{f}(x))$ را در Ω_1 در بر می‌گیرد، (۱) و(۲) ایجاب می‌کنند که

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{f}(x)) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\zeta)[\zeta e - \tilde{f}(x)]^{-1} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} g(\zeta)[\zeta - f(\lambda)]^{-1} d\zeta (\lambda e - x)^{-1} d\lambda \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} g(f(\lambda))(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0} h(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda = \tilde{h}(x)
\end{aligned}$$

$\square$

اکنون به ارائه‌ی چند کاربرد از حساب طیفی می‌پردازیم. کاربرد نخست در مورد وجود ریشه و لگاریتم است. گوییم عضو $x \in A$ دارای ریشه‌ی n ام در A است هر گاه به ازای یک $y \in A$ داشته باشیم $x = y^n$. اگر داشته باشیم $x = \exp(y)$ آنگاه y را یک لگاریتم x می‌گویند. اگر $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ یک تابع تام باشد آنگاه با توجه به پیوستگی نگاشت $\tilde{f} \longrightarrow f$ بر $H(\mathbb{C})$، چون بطور یکنواخت بر زیر مجموعه‌های فشرده‌ی $\mathbb{C}$، $s_n(\lambda) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n \lambda^n \longrightarrow f(\lambda)$، داریم

$$\tilde{f}(x) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \tilde{s}_N(x) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \sum_{n=0}^{N} \alpha_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \qquad (x \in A)$$

بلاخص داریم $(\exp\tilde{)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x)$.

قضیه ۹.۴.۵ گیریم $x \in A$ معکوس پذیر و $\sigma(x)$ صفر و ∞ را از هم جدا نکند. در این صورت

(a): x دارای ریشه از هر مرتبه در A است؛

(b) : x دارای لگاریتم در A است؛

(c): اگر $\epsilon > 0$ آنگاه چند جمله‌ای P هست که $\|x^{-1} - P(x)\| < \epsilon$.

اگر به علاوه $\sigma(x)$ در محور حقیقی مثبت واقع شود آنگاه ریشه‌ها در (a) می‌توانند چنین خاصیت باشند.

برهان. (a): بنابه فرض 0 در مولفه‌ی همبندی نا محدود $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ واقع است. بنابراین تابع f موجود است بطوری که بر یک مجموعه‌ی باز و همبند ساده‌ی $\Omega \supseteq \sigma(x)$ هولومورفیک بوده و در رابطه‌ی

$$\exp(f(\lambda)) = \lambda \qquad (\lambda \in \Omega)$$

صدق می‌کند (چرا؟). بنابراین بنا به قضیه‌ی (۸.۴.۵)

$$\exp(\tilde{f}(x)) = x$$

و بنابراین $y = \tilde{f}(x)$ یک لگاریتم x است. اگر برای هر $\lambda \in \sigma(x)$ داشته باشیم $0 < \lambda < \infty$ آنگاه f را می‌توان چنان اختیار کرد که بر $\sigma(x)$ حقیقی باشد (چرا؟). بنابراین در این حالت $\sigma(y) = \sigma(\tilde{f}(x)) = f(\sigma(x))$ بر محور حقیقی قرار دارد. اگر $z = \exp\left(\frac{y}{n}\right)$، آنگاه $z^n = \exp(y) = x$، و قضیه‌ی نگاشت طیفی نشان می‌دهد که $\sigma(z) = \exp(\sigma(\frac{y}{n})) \subseteq (0, \infty)$ هر گاه $\sigma(y) \subseteq (-\infty, +\infty)$. این (a) و (b) را ثابت می‌کند.

برای اثبات (c) ، چون $\sigma(x) \neq 0$ لذا مجموعه‌ی باز $\Omega \supseteq \sigma(x)$ موجود است که $0 \notin \Omega$ و $S^2 \setminus \Omega$ مرتبط است. بنابراین تابع $\frac{1}{\lambda}$ به $H(\Omega)$ تعلق داشته و بنا به قضیه‌ی رانگ [۱]، دنباله‌ی $\{P_n\}$ از چندجمله‌ای‌ها هست که بر زیر مجموعه‌های فشرده‌ی Ω، بطور یکنواخت $P_n(\lambda) \to \frac{1}{\lambda}$. پس بنا به پیوستگی $f \to \tilde{f}$، $\|P_n(x) - x^{-1}\| \to 0$ وقتی که $n \to \infty$. □

نتیجه ۱۰.۴.۵ اگر M یک ماتریس $n \times n$ ی مختلط معکوس پذیر باشد آنگاه ماتریس N هست که $M = \exp(N)$.

برهان. A را جبر کلیه‌ی ماتریس های $n \times n$ ی مختلط بگیرید. □

قضیه ۱۱.۴.۵ گیریم $x \in A$ و P یک چندجمله‌ای باشد بطوری که $P(x) = 0$. در این صورت

(a): $\sigma(x)$ در مجموعه‌ی صفرهای P واقع است؛

(b): در حالت خاص اگر x یک خود توان باشد، یعنی $x^2 = x$، آنگاه $\sigma(x) \subseteq \{0,1\}$.

(c): اگر طیف عنصری از A مرتبط نباشد آنگاه A دارای خود توان غیر بدیهی (غیر از ۰ و e) است.

برهان. بنا به قضیه‌ی نگاشت طیفی، داریم

$$P(\sigma(x)) = \sigma(P(x)) = \sigma(0) = \{0\}$$

این (a) و (b) را ثابت می‌کند.

اگر $\sigma(x)$ مرتبط نباشد آنگاه مجموعه‌های باز و مجزای Ω_0 و Ω_1 هستند که هر یک از آنها $\sigma(x)$ را قطع کرده و $\sigma(x) \subseteq \Omega_0 \cup \Omega_1 := \Omega$

توضیح. داریم

$$\sigma(x) = [O_0 \cap \sigma(x)] \cup [O_1 \cap \sigma(x)]$$

که در آن O_0 و O_1 در $\mathbb{C}$ بازند، $O_0 \cap \sigma(x) \neq \varnothing$، $O_1 \cap \sigma(x) \neq \varnothing$ و $O_0 \cap O_1 \cap \sigma(x) = \varnothing$. قرار دهید $\Omega_0 = O_0$ و $\Omega_1 = O_1 \setminus O_0$

$$\varnothing \neq O_1 \cap \sigma(x) = [(O_1 \setminus O_0) \cap \sigma(x)] \cup [O_0 \cap O_1 \cap \sigma(x)]$$

[۱] Runge

f را چنین می‌گیریم که $f(\lambda)=0$ در Ω_0 و $f(\lambda)=1$ در Ω_1. داریم $f\in H(\Omega)$ و $f^2=f$. ⋆

بنابراین اگر قرار دهیم $y=\tilde{f}(x)$، داریم $y^2=y$، و چون بنا به قضیه‌ی نگاشت طیفی

$$\sigma(y)=\sigma(\tilde{f}(x))=f(\sigma(x))=\{0,1\}$$

y یک خود توان نا بدیهی است زیرا طیف 0 و e مجموعه‌های یکانی هستند. □