جریان آمد و شد پواسن در یک صف بازخوردی عمومی

(Poisson Traffic Flow in a General Feedback Queue)

آرمان دیدنده، دانشجوی مقطع کارشناسی رشته علوم‌کامپیوتر

دانشگاه صنعتی امیرکبیر تهران

پائیز و زمستان ۱۳۸۶

Arman.Didandeh@gmail.com

چکیده

نوعی از انواع صف‌های G/k/. با یک فرآیند رسیدن ساکن و بازخورد تأخیری مشتری را در نظر می‌گیریم، که در آن مشتریان پس از دریافت خدمات، و البته پس از یک تأخیر مستقل عمومی در بازخورد -که توزیع آن دارای یک تابع چگالی پیوسته می‌باشد- به‌طور مکرر به انتهای صف باز می‌گردند. از روش‌های تزویج متقابل(Coupling) استفاده می‌کنیم تا نشان دهیم که تحت شرایط متعادلی، جریان بازخوردی بازگشت مشتریان به انتهای صف -در حالی که توزیع تأخیر بازخوردها نسبتاً افزایش می‌یابد- به یک فرآیند پواسن همگرا است. این امر به ما اجازه می‌دهد که تخمین ساده‌ای برای زمان انتظار در رسیدن‌های تحت پواسن انجام دهیم؛ و هم‌چنین اثبات متقابل جدیدی برای نتیجه کلاسیک Breiman در آمد و شد بزرگراه(۱۹۶۳) ارائه می‌دهد. در ضمن تأخیرهای غیر مستقل را هم در نظر میگیریم و بحثی را درباره‌ی این‌گونه از تأخیرها و نتایج مورد انتظار ارائه خواهیم داد.

کلمات کلیدی

صف دارای بافر متناهی(Finite buffer queue)، صف بازخورد تأخیری(Delayed feedback queue)، فرآیند پواسن، توزیع عمومی مشتریان(Customers' general distribution)، پایداری، فرآیند بازخوردی ثابت(Stationary)، تابع جرم نقطه‌ای، تزویج متقابل(Coupling)، تداخل، سامانه‌ی بی‌نهایت خادم، فرآیند نقطه‌ای Ergodic، شکست/کسر(Fraction)

معرفی

تئوری صف[1] چیست و در کجا به‌کار می‌رود؟

صف، یک خط انتظار[2] است و تئوری صف، تئوری ریاضی در راستای مدل‌سازی و آنالیز این خطوط انتظار که به‌صورت تصادفی به تقاضاها ارائه خدمت(سرویس) می‌کنند. مدل صف، یک شرح انتزاعی از سامانه مورد نظر است. نوعاً یک مدل صف نمایانی برای پیکربندی فیزیکی[3] سامانه و هم‌چنین طبیعت تصادفی تقاضاها[4]ست. برای مثال، در زمینه ارتباطات رایانه‌ای، یک مجرا(رسانه) ارتباطی را می‌توان به‌عنوان یک خادم[5]، و پیام‌ها را به‌عنوان مشتریان در نظر داشت. زمان

---

1 Queue Theory
2 Waiting Line
3 Physical Configuration
4 Stochastic Nature of Demands
5 Server

تصادفی که در آن پیام‌ها برای استفاده از مجرا درخواست می‌دهند را فرآیند ورودی[۶] نام می‌دهیم. در مقابل به زمان تصادفی که در آن پیام‌ها با اشغال مجرا در طول خطوط آن منتقل میشوند را فرآیند خدمت[۷] می‌گوئیم.

تئوری صف در سال‌های آغازین دهه ۱۹۰۰با کارهای A. K. Erlang از شرکت تلفن کپنهاگ بر روی جریان‌های آمد و شد مخابراتی[۸] متولد شد. در ادامه افرادی مانند Jackson، Takacs، D'Avignon و بسیاری دیگر با صرف زمان و هزینه بی‌شماری بر روی نظریات مرتبط با تئوری صف، این دانش را بسط و گسترش دادند[۹].

دامنه کاربردی این نظریه به قدری در این سالیان پیشرفت کرده است که نه‌تنها ارتباطات مخابراتی و علوم کامپیوتر را در بر دارد، بلکه در صنعت، کنترل آمد و شد هوایی، کارهای نظامی و بسیاری موارد دیگر، نیاز به خود را به رخ بشر قرن اخیر نشان داده‌است. تئوری صف به‌عنوان یک متدلوژی استاندارد (در کنار برنامه‌ریزی خطی، شبیه‌سازی و علوم مشابه) برای تحقیقات عملیاتی و علوم مدیریتی مطرح است.

طرح مسأله و اهداف

هدف از کار بر روی این مسأله، ایجاد یک تطابق[۱۰] برای تخمین جریان ورودی پواسن[۱۱] در یک مدل صف دارای بازخورد تأخیری[۱۲] است. مدل صف بازخوردی مورد نظر را به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

یک صف با بافر متناهی به شکل G/k/. که دارای جریان ورودی ثابت Ergodic با نرخ λ، یک توزیع عمومی برای خدمات[۱۳] و بازخورد دارای تأخیر مشتریان در نظر می‌گیریم. مشتریان پس از اخذ خدمت ممکن است به انتهای صف بازگردند. روند این بازگشت را با تابعی به‌شکل cW نمایش می‌دهیم که در آن W متغیری برای یک تابع تصادفی توزیع پیوسته است و $c > 0$ را ضریب اندازه تأخیر بازخوردها نام می‌دهیم.

مسأله مورد نظر ما بررسی رفتار سامانه در هنگامی است که ضریب اندازه c دارای مقادیر بسیار بزرگ می‌شود یعنی:

$c \to \infty$

صف با بافر متناهی به این معنی است که مشتریان رسیده به صف در حالی منتظر خواهند ماند که مجموع کار سامانه از یک حد بالا مثل b کوچکتر باشد. در غیر این‌صورت مشتریان، ازدست‌رفته[۱۴] تلقی خواهند شد. البته این تلقی تنها برای همان بار رسیدن به صف وجود دارد و بنا بر تعریف مسأله، این امکان هست که همان مشتریان ازدست‌رفته در رجوع مجدد به صف برای بازخورد در دفعات بعدی وارد صف انتظار گردند. بدین ترتیب مفهوم استقلال را به‌صورت ضمنی وارد صورت مسأله می‌نمائیم.

هنگامی‌که دفعات بازخورد مشتریان به سامانه دارای مقدار متوسط متناهی نظیر m و واریانس σ^2 باشد، نشان می‌دهیم که فرآیند نقطه‌ای ثابت مشتریانی که به صف باز می‌گردند، تحت شرایطی که توزیع تأخیرها در مقیاس با فرستادن c به سمت بی‌نهایت افزایش می‌یابد، به یک فرآیند پواسن با نرخ λm همگراست. با نگاهی خاص به جریان ورودی پواسن، می‌توان طول صف ثابت را با طول صف غیر بازخوردی M/G/k دارای نرخ پواسن $\lambda(m+1)$ تخمین زد.

نتیجه عجیب در این بحث می‌تواند این باشد که برای هر وضعیت و تنظیمات عمومی (توزیع زمان خدمات، بازخوردها، ...) پواسن رخ خواهد داد. حتی اگر تأخیرهای بازخوردی در مقیاس بزرگ بوده ولی iid نباشند.

دلایل علاقه‌مندی ما به مسأله

---

6 Arrival Process
7 Service Process
8 TeleTraffic
9 Robert B. Cooper, Encyclopedia of Computer Science, 2000
10 Justification
11 Poisson A.P
12 Delayed Feedback
13 General Service Distribution
14 Lost

دلیل اصلی این انتخاب و علاقه‌مندی به مدل طراحی شده پیشنهادی در این مقاله، کاربردی بودن و مشابهت آن برای مدل‌سازی روندهای طراحی نرم‌افزار عمومی[۱۵] (روش ترتیبی خطی، آبشاری، ...) است. بدین‌وسیله می‌توان اثرات بازکار[۱۶] بر روی انباره‌های کاری را سنجید. در این مدل پیشنهادی، نقش‌های زیر تعریف می‌شوند:

- ✓ مشتریان: پروژه‌های نرم‌افزاری که محصول نام دارند.
- ✓ خادم‌ها: توسعه‌دهندگان نرم‌افزاری[۱۷] که وظیفه طراحی محصولات را بر عهده دارند.
- ✓ بازخورد: بازکار مورد نیاز که نتیجه مشکلات یافته شده طی دوره‌های مستقل تست یا کاربرد اولیه محصول هستند.

در این مدل، تأخیرهای طولانی در کشف مشکلات محصول و همچنین استقلال مورد نظر ما کاملاً قابل تطبیق هستند.

ساختار ادامه مقاله

در بخش بعدی (برآیند و نتیجه اصلی) ما قضیه اصلی را ارائه می‌دهیم و یک استنباط فرعی هم برای فرآیندهای ورودی پواسن در نظر می‌گیریم. در ادامه به اثبات این نتایج خواهیم پرداخت. در انتها یک عمومیت امکان‌پذیر[۱۸] را برای حالتی که استقلال پیش فرض بین زمان‌های بازخورد تأخیری وجود نداشته باشد را بررسی خواهیم نمود.

برآیند و نتایج اصلی

در مدل صف بازخوردی[۱۹] مورد نظر ما در اینجا، مشتریان تحت یک فرآیند ثابت Ergodic با نرخ λ به سامانه می‌رسند. مشتری iام به انتهای صف می‌رسد و M_i بار دیگر باز خواهند گشت، پیش از آنکه به‌طور کامل از آن جدا شود. شایان ذکر است که M_iها iid و دارای متوسط متناهی m و واریانس متناهی σ^2 هستند.

پس از رسیدن، مشتری iام در صف می‌ایستد، خدمات را از یکی از k خادم با توزیع عمومی دریافت می‌کند و سپس با یک تأخیر به انتهای صف باز می‌گردد. تأخیر مشتری هنگامی که برای بار kام برای بازخورد مراجعه کرده است را با cW_{ik} واحد زمانی فرموله می‌کنیم که در آن $c > 0$ یک ضریب ثابت در نظر گرفته شده است. فرض ما بر این است که تمام W_{ik}ها iid با یک توزیع رایج هستند که با W مشخص می‌شوند و دارای تابع چگالی پیوسته نظیر f هستند.

برای پایداری[۲۰] فرض می‌کنیم که مشتریان رسیده به صف، اگر صف را دارای بیشتر از b واحد کاری بیابند، در لحظه صف را ترک می‌گویند. مشتری iام به مقدار $1+M_i$ بار به انتهای صف خواهد رسید، اما در حقیقت تنها زمانی که زمان انتظار از زمان متناظر با b واحد کاری کمتر باشد، در انتظار خواهد ماند. این فرض زمانی اهمیت خود را نمایان می‌سازد که صف را پایدار و مقدار b را بزرگ در نظر بگیریم.

برای ساخت یک نمونه ثابت از صف بازخوردی‌مان، در ابتدا مقدار t را ثابت می‌کنیم و صف را برای آغاز در زمان $-t$ خالی در نظر می‌گیریم. زمانی را که مشتری iام برای بار kام بازخورد به صف مراجعه می‌کند را با $A_{i,k}^t$ نمایش می‌دهیم. مشتریان را هنگامی‌که برای بار اول به صف مراجعه می‌کنند به‌صورت $A_{i,1}^t$ ثبت[۲۱] می‌کنیم. در نتیجه:

$$\ldots < A_{2,1}^t < A_{1,1}^t < 0 < A_{0,1}^t < A_{-1,1}^t < A_{-2,1}^t < \ldots$$

تعریف می‌کنیم:

$$\varepsilon_k^t \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(A_{i,k}^t)$$

15 General Software Development Process
16 Rework
17 Developers
18 Possible Generalization
19 Feedback Queue
20 Stability
21 Numbered

که در آن $\delta(W)$ تابع جرم نقطه‌ای[۲۲] در w است. نتیجه اصلی ما با خصوصیات فرآیندهای بازخوردی ثابت[۲۳]
$\varepsilon_k \equiv \lim_{t\to\infty} \varepsilon_k^t$, k=1,2,…
سروکار دارد که فرض می‌کنیم وجود دارند و یکتا هستند. به بیان دیگر ε_k فرآیند ثابت زمان‌ها[۲۴]ست، هنگامی‌که مشتریان برای بار kام به انتهای صف می‌رسند.

نتیجه: با افزایش مقدار ضریب اندازه به‌صورت $c\to\infty$، فرآیند مشتریانی که به انتهای صف بازمی‌گردند به یک فرآیند پواسن با نرخ λm همگراست. این نتیجه اصلی مورد نظر ماست و آن‌را در قالب قضیه زیر ارائه می‌دهیم.

قضیه‌ی اصلی: *با فرض $\varepsilon \equiv \sum \varepsilon_k$ برای $k>1$ به‌عنوان فرآیند ثابت بازگشت[۲۵] مشتریان به انتهای صف بازخوردی پس از زمان تأخیر بازخورد، در مدل صف بازخوردی معرفی شده در بالا که دارای یک نرخ ثابت Ergodic مثل λ و فرآیند ورودی شروع ε_1 است، آنگاه داریم:*

$$\varepsilon \to_d P_{m\lambda} \qquad as \qquad c\to\infty$$

که در آن $\to d$ به معنی هم‌گرایی در توزیع برای فرآیند نقطه‌ای است.

نکته یک: قضیه بالا تنها برای حالت $k>1$ سازگار و همگراست و نباید در این هم‌گرایی شرایط فرآیند ورودی شروع را لحاظ نمود. این بدین معنی است که قضیه بالا برای $k\geq1$ برقرار نخواهد بود.

استنباط فرعی قضیه: با فرض صف بازخوردی با نرخ پواسن برابر λ برای فرآیند ورودی خواهیم داشت:

$$\sum_{k\geq1} \varepsilon_k \to_d P_{(m+1)\lambda} \qquad as \qquad c\to\infty$$

این استنباط فرعی ذهن را برای نکته زیر به‌عنوان نتیجه بر می‌انگیزاند:

نکته دو: می‌توان طول صف ثابت بالا با نمایان متغیر تصادفی L_F را با استفاده از طول یک صف ثابت M/G/k بدون بازخورد ولی با نرخ پواسن ورودی $\lambda(m+1)$ که با نمایان متغیر تصادفی $L_{M/G/k}$ نشان داده می‌شود، تخمین زد:

$$L_F \approx_d L_{M/G/k}$$

البته شرایط تخمین بالا در نظر داشتن زمان تأخیر قابل قبول برای مدل صف مورد نظرمان است. این نکته ما را برای استفاده از فرمول‌های استاندارد صف برای تخمین مقادیر کارآیی صف بازخوردی رهنمون می‌سازد.

اثبات نتایج اصلی

مراحل اثبات را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه نمود:

۱. در ابتدا یک نسخه‌ی مزدوج[۲۶] برای سامانه صف بازخوردی‌مان طراحی می‌کنیم. در این مدل ورودی‌ها پواسن هستند و بی‌نهایت خادم در اختیار داریم. نشان می‌دهیم که جریان بازخورد مشتریان در این مدل به یک

---

22 Point Mass Function
23 Stationary Feedback Process
24 Stationary Time Process
25 Stationary Returning Process
26 Coupled Version

فرآیند پواسن مجانب است. در این ساختار مستقل عمل می‌کنند و در نتیجه جریان بازخوردی مشتریان ذاتاً با فرآیند مستقل پواسن انطباق دارد.

۲. در ادامه این ساختار را با ساختار سامانه مورد مسأله در این مقاله مزدوج می‌سازیم تا با تقریب مناسبی تمام مشتریان بازخوردی در ساختار اصلی به مشتریان ساختار مزدوج مجانب شوند. به این ترتیب ساختار اصلی به مدل بی‌نهایت خادم تعریف شده جدید منطبق خواهد بود و یک فرآیند پواسن را دارا خواهد بود.

در نگاه نخست ممکن است اینگونه به نظر بیاید که می‌توان اثبات را مشروط[۲۷] بر فرآیند خروجی صف و مقدم[۲۸] بر بازخورد صف، پس از گذر ابتدایی مشتریان بر صف ارائه داد در حالی‌که این گفته صحیح نیست. دلیل این امر عدم استقلال زمان‌های بازخورد آتی از یکدیگر و از زمان اول به‌دلیل امکان بروز تداخل[۲۹] بین زمان بازخورد دوم و سوم مشتری اول و زمان ورود مشتری دیگری می‌باشد. حال اینکه با فرض بی‌نهایت خادم هیچ‌گونه تداخلی بین مشتریان رخ نخواهد داد.

به نظر می‌رسد که نتیجه مورد نظر ما در اینجا برای تعداد محدودی از خادم‌ها به دلیل تداخل و مشکلات ریز ناشی از عدم استقلال، کاملاً بر نتایج هم‌گرایی فرآیند نقطه‌ای استاندارد منطبق نخواهد بود.

به‌همین دلایل ابتدا یک سامانه صف بازخوردی مزدوج برای ساختار ابتدایی مد نظرمان معرفی می‌کنیم و به آن نام "سامانه بی‌نهایت خادم"[۳۰] را اختصاص می‌دهیم. نوع رفتار و شرایط این سامانه کاملاً مشابه سامانه اصلی ماست و دارای نرخ ورودی پواسن λ و تعداد بی‌نهایت خادم است. مقادیر عددی این سامانه را با علامت مشخصه‌ای با مقادیر متناظر در سامانه اصلی متمایز می‌سازیم. از این رو فرآیند ورودی اولیه را با $\acute{\varepsilon}_1$ مشخص می‌کنیم و داریم:

$\acute{\varepsilon}_1 =_d P_\lambda$

فرآیند مشتریانی که برای بار kام به صف می‌رسند را با $\acute{\varepsilon}_k$ مشخص می‌کنیم و داریم:

$\acute{\varepsilon} = \sum_{k>1} \acute{\varepsilon}_k$

در این مدل مشتریان هرگز در صف به انتظار نخواهند بود و به همین دلیل هیچ‌گونه تداخلی نخواهیم داشت[۳۱].

اصل موضوع اول بر این نکته استوار است که برای سامانه بی‌نهایت خادم، فرآیند بازخورد به یک فرآیند پواسن مجانب می‌شود. در زیر از علامت $\Xi(B)$ برای نمایش تعداد نقاط مجموعه B برای فرآیند نقطه‌ای Ξ استفاده می‌کنیم.

اصل موضوع یک: با در نظر گرفتن فرض‌ها و نمایان‌های بالا خواهیم داشت:

$\acute{\varepsilon} \to_d P_{m\lambda} \quad \text{as} \quad c\to\infty$

اثبات: از آنجایی که تأخیرهای بازخوردی را می‌توان به‌صورت یک صف بی‌نهایت خادم نگریست، ما ذاتاً صف‌های پشت سر هم $M/G/\infty$ خواهیم داشت که برای خروج مشتریان از صف بین آن‌ها رقیق‌گردانی[۳۲] ایجاب شده است. از آنجایی که خروجی ثابت یک صف $M/G/\infty$ یک فرآیند پواسن دارد و یک فرآیند پواسن رقیق[۳۳] هم‌چنان پواسن است، این نتیجه را می‌دهد که:

$$\acute{\varepsilon}_k =_d P_{\lambda k} \qquad (1)$$

که در آن:

$\lambda_k = \lambda P(M \geq k-1)$

---

27 Conditioning
28 Prior
29 Interference
30 Infinite Server System
31 Daley & Vere-Jones, 1988
32 Thinning
33 Thinned Poisson Process

به‌هرحال فرآیندهای $\acute{\varepsilon}k$ برای $k=2,3,\ldots$ مستقل نخواهند بود، در نتیجه فرآیند حاصل از برهم‌نهی آن‌ها یعنی $\acute{\varepsilon}$ لزوماً یک فرآیند پواسن نخواهد بود.

در مرحله بعدی چند مجموعه Borel [۳۴] به‌صورت $B \subset R$ را تثبیت[۳۵] می‌کنیم و قرار می‌دهیم:

$$w = \sup\{x \mid x \in B\} - \inf\{x \mid x \in B\}$$

که در آن w اندازه مجموعه B خواهد بود. N را تعداد مشتریان مختلفی در نظر می‌گیریم که طی B به انتهای صف باز می‌گردند. توجه می‌کنیم که $\Xi(B) \geq N$ زیرا هر مشتری می‌تواند بیش از یک‌بار به انتهای صف باز گردد. مشاهده می‌شود که N دارای یک توزیع پواسن با پارامتر $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda p(x)dx$ است، که در آن $p(x)$ احتمال آن است که یک مشتری که برای بار اول در زمان x به صف رسیده، طی B به آن بازگردد». شانس این‌که یک مشتری بیش از یک‌بار طی B به صف بازگردد برابر است با:

$$E[P(N > \acute{\varepsilon}(B)|N)] \leq E[NP(cW \leq \omega)] \to 0 \qquad \text{as} \qquad c \to \infty$$

با این شرایط و نزدیک شدن به (1)، چون تمام مشتریانی که طی B به صف باز می‌گردند متفاوت از یکدیگرند، با جمع زدن (1) روی k می‌بینیم که نرخ فرآیند $\acute{\varepsilon}$ باید $m\lambda$ باشد. از این رو خواهیم داشت:

$$\acute{\varepsilon}(B) \to_d P_{m\lambda}(B) \qquad as \qquad c \to \infty \quad (2)$$

اصل موضوع دوم یک نتیجه تزویجی برای متغیرهای تصادفی دارای تابع چگالی پیوسته است. از این روش برای تزویج زمان‌های بازخورد کمک می‌گیریم.

اصل موضوع دو: با فرض یک تابع چگالی پیوسته نظیر f روی R^+ و $\epsilon > 0$، یک $\delta^* > 0$ وجود دارد که برای تمام $0 < \delta < \delta^*$ می‌توان متغیرهای تصادفی نامنفی نظیر W و $\hat{W}$ را بر روی یک فضای احتمال مشابه ساخت که هر دو آن‌ها دارای تابع چگالی مشابه f باشند و:

$$P(\hat{W} = W + \delta) \geq 1 - \epsilon$$

اثبات: با داشتن مقدار $\epsilon > 0$، یک مقدار برای L اختیار می‌کنیم به گونه‌ای که:

$$\int_0^L f(w)dw \geq 1 - \epsilon$$

از آنجایی که به مجموعه‌ی $[0, L]$ به‌صورت پیوسته و یکنواخت محدود هستیم، می‌توان یک δ^* یافت به‌گونه‌ای که $0 < \delta < \delta^*$ دلالت بر این داشته باشد که:

$$|f(w) - f(w-\delta)| \leq \epsilon/2L$$

بر روی یک δ تثبیت می‌کنیم و نقطه‌ای نظیر (w,z) را به‌صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم به گونه‌ای که به‌صورت یکنواخت[۳۶] زیر نمودار f واقع گردد. $\hat{W}$ را برابر w می‌گیریم. اگر $z \leq f(w-\delta)$ صادق باشد، آن‌گاه W را برابر $w-\delta$ اختیار می‌نماییم. در غیر این‌صورت و اگر $z > f(w-\delta)$، آن‌گاه نقطه‌ای با همان شرایط یکنواختی در محدوده تعریف شده $\{(w,z) \mid f(w) \leq z \leq f(w-\delta)\}$ انتخاب می‌کنیم و قرار می‌دهیم: $W = w-\delta$

قابل اثبات است که با این ساختار داریم:

$$P(W \leq t) = P(\hat{W} \leq t) = \int_0^t f(w)dw ,$$
$$P(\hat{W} = W + \delta) \geq \int_0^\infty \min\{f(w), f(w-\delta)\}dw \geq \int_0^L (f(w) - \epsilon/2L)dw \geq 1 - \epsilon/2 - \epsilon/2 = 1 - \epsilon$$

که در آن، قسمت قبل از آخر از پیوستگی یکنواخت f محدود به $[0, L]$ پیروی می‌نماید.

---

34 For more details on Borel Sets, go to Appendix I
35 Fix
36 Uniformly

هم‌چنین به یک اصل موضوعی سوم نیازمندیم تا فرآیندهای نقطه‌ای Ergodic را با یکدیگر همتاسازی[۳۷] نماییم. از این اصل برای تعمیم نتایج به فرآیند ورودی از شروع یعنی از ε_1 استفاده می‌نماییم.

اصل موضوع سه: با فرض دو فرآیند ورودی ثابت Ergodic نرخ λ مشترک، متّفق و مشاع[۳۸] که نظیر A,B و $\epsilon>0$، یک $\delta>0$ وجود دارد که می‌توان مشتریان A و B را به‌صورت جفت متناظر[۳۹] نماییم. هر یک از این جفت‌ها با اختلاف زمانی δ از یکدیگر خواهند رسید و فرآیندهای مشتریان جفت شده و جفت نشده هر دو فرآیندهایی ثابت خواهند بود و دومی چگالی‌ای کمتر از ϵ خواهد داشت.
اثبات: با به‌کارگیری تئوری Ergodic می‌توان مقدار به اندازه کافی بزرگی برای δ یافت که شانس این‌که هر دو $A([0,\delta])$ و $B([0,\delta])$ در فاصله $[\delta(\lambda- \epsilon/2),\delta(\lambda+ \epsilon/2)]$ قرار گیرند را به کمتر از مقدار $1-\varepsilon$تقلیل دهد. این مقدار را برای δ تثبیت می‌کنیم و $U(0,\delta)$ را یک متغیر تصادفی یکنواخت در نظر می‌گیریم.
حال محور زمان را به بازه‌هایی نظیر $[U+i\delta, U+(i+1)\delta]$ برای مقادیر $i\in Z$ تقسیم می‌کنیم. با این ساختار، حداقل در شکست[۴۰] $1-\epsilon$ از این بازه‌ها، تعداد مشتریان در فرآیندهای A و B با یکدیگر دارای اختلاف $\delta\epsilon$ هستند. مشتریان درون هر بازه را به‌صورت کاملاً تصادفی با یکدیگر متناظراً جفت می‌کنیم. در این حالت حداکثر به اندازه ϵ در بازه‌ها به‌صورت غیر جفت باقی می‌مانند. مشتریان جفت نشده را کنار می‌گذاریم و می‌دانیم که این حداکثر برای $\lambda\epsilon$ مشتری اتفاق خواهد افتاد. از آنجایی که مقدار ϵ کاملاً اختیاری بود، نتیجه مورد نظر قابل قبول است.

حال با استفاده از تمام موارد گفته شده تا این‌جا، به اثبات قضیه‌ی اصلی می‌پردازیم.

اثبات قضیه‌ی اصلی: *اگر بتوانیم آن‌چنان ε و $\acute{\varepsilon}$ را مزدوج کنیم که برای هر مجموعه محدود Borel که $B \subset R$ داشته باشیم:*

$$P(\varepsilon(B) =\acute{\varepsilon}(B)) \to 1 \quad as \quad c\to\infty \quad (3)$$

آن‌گاه قضیه اصلی از اصل موضوعی یک پیروی می‌کند.
برای برقرار کردن (3)ما $\epsilon>0$ را تثبیت می‌کنیم و از اصل موضوعی سه کمک می‌گیریم تا حداقل کسر $(1-\epsilon)$ از مشتریان $\acute{\varepsilon}$ را با نظایرشان در ε مزدوج و جفت‌سازی نماییم، تا با حداکثر اختلاف زمانی d از یکدیگر فرا برسند. حال مقدار به اندازه کافی بزرگی برای c اختیار می‌کنیم تا:

$$(d+b+a)/c < \delta^*$$

که در آن δ^* از اجرای اصل موضوعی دو بر روی تابع چگالی بازخوردی[۴۱] f یافته می‌شود و a همان کسر $1-\epsilon$ از توزیع خدمت است.
حال زمان خدمت و تعداد حلقه‌های بازخورد ایجاد شده برای مشتریان هر جفت را برای همانندسازی مزدوج می‌کنیم. شرط پایداری تضمین می‌کند که مشتریان حداکثر به‌اندازه زمان b واحد کاری منتظر خواهند ماند. در نتیجه پس از گذر از صف، حداقل کسر $1-\epsilon$ از جفت‌های مشتریان با اختلاف زمانی نه بیشتر از زمان $a+b+d$ واحد کاری از یکدیگر، از صف خارج و جدا خواهند شد. در نظر می‌گیریم که برای جفتی از مشتریان مزدوج، مشتری سامانه اصلی با اختلافی برابر $\Delta < a+b+d$ از مشتری متناظرش در سامانه بی‌نهایت خادم از صف جدا می‌شود. زمان متناظر بازخورد جفت

---
37 Match Up
38 Jointly
39 Pair Off
40 Fraction
41 Feedback Delay Density Function

یعنی cW و $c\hat{W}$ را با استفاده از روند اصل موضوعی دو مزدوج می‌سازیم. در نظر می‌گیریم $\delta = \Delta/c < \delta^*$ تا داشته باشیم:

$$P(c\hat{W} = cW + \Delta) = P(\hat{W} = W + \delta) \geq 1-\epsilon$$

مشتریانی که از ابتدا جفت نشده و غیر مزدوج مانده‌اند می‌توانند زمان خدمت و بازخورد غیر مزدوج داشته باشند. این بدین معناست که با احتمال حداقل $1-\epsilon$، مشتریان از شروع مزدوج شده دقیقاً در یک زمان مشترک در گذر بعدی به صف خواهند رسید. نیز با احتمال حداکثر ϵ، جفت به‌صورت غیر مزدوج در خواهد آمد.

تزویج همانندی را برای زمان‌های بازخورد پسین (متعاقب)[42] انجام می‌دهیم و مشتریانی که جفت نگردند می‌توانند زمان خدمت و بازخورد غیر مزدوج داشته باشند.

رخداد A را رخدادی در نظر می‌گیریم که در آن یک جفت شروع‌کننده، غیر مزدوج می‌شوند و M را دفعاتی که مشتریان در جفت مورد نظر بازخورد می‌دهند.از پاراگراف‌های قبل می‌دانیم که:

$$P(A|M) \leq 2M\epsilon$$

از این‌رو تعداد فرا رسیدن‌های هر مشتری برای مشتریانی که نهایتاً غیر مزدوج می‌شوند برابر است با:

$$E[M|A] = E[MP(A|M)] \leq 2\epsilon E[M^2] = 2\epsilon(\sigma^2+m^2)$$

چون می‌توان این مقدار را به‌صورت قراردادی بسیار کوچک نمود، شانس رسیدن یک مشتری غیر مزدوج طی B را نیز می‌توان بسیار کوچک در نظر گرفت. چون تمام مشتریان باقی‌مانده در B با یکدیگر جفت می‌شوند، رابطه (3) تحت شرط $\epsilon \to 0$ صادق خواهد بود.

بحث و استنتاج

استدلال تزویج استفاده شده در بالا را می‌توان به سادگی برای موقعیت‌هایی که زمان‌های بازخورد غیر iid دارند نیز بسط داد. فرض می‌کنیم که زمان بازخورد kام برای مشتری iام یعنی cW_{ik} روی مقادیر مختلف k از تمام شرایط-نظیر مجموع دفعات گذر وی یعنی M_i و زمان‌های خدمت یعنی $S_{i,1}$ و ... و $S_{i,k}$- مستقل باشد، و این‌که W_{ik} دارای یک تابع چگالی پیوسته باشد که توسط مقادیر k و M_i و $S_{i,1}$ و ... و $S_{i,k}$ محدود شود. به سادگی مشخص می‌شود که استدلالی مشابه قضیه اصلی برای این مدل قابل گسترش و جاری کردن است.

نتیجه‌گیری

طبق مدل کاربردی مورد نظر ما در مهندسی نرم‌افزار و با عنایت به تمام موارد ریاضی اثبات شده، فرضیه زیر ارائه می‌شود. این فرضیه با توجه به همسان‌گرایی شرایط مدل حقیقی و مدل ریاضی مورد مقاله، قابل اثبات دقیق ریاضی نیز هست که در این مقام، تلاشی برای این‌کار نشده و از طرف نگارنده به نظیر کردن ذهنی بسنده شده است.

با در نظر داشتن موارد زیر به‌عنوان پیش فرض:

- نام پروژه: طراحی سامانه نرم‌افزاری شبیه‌ساز مدیریت کنترل در فرآیند پیش پردازش پالایشگاه گاز، فاز ۱۲ و ۱۳، منطقه‌ی عسلویه
- سفارش‌دهنده: مدیریت ارشد شرکت OASIS، آقای جان اصانلو، طرف ایرانی نماینده شرکت Total فرانسه
- پیمان‌کار: گروه کاری کهکشان پارس، واحد مرکزی

---

42 Subsequent Feedback Times

- تیم مدیریت پروژه: آقای دکتر مهرداد پیرایش، خانم مهندس رضوانه حقیقت‌مدار
- مدیر امور هماهنگی: آقای مهندس میر تقوی
- مدیر بررسی‌های امکان‌سنجی و آنالیز نیازمندی‌ها: آقای دکتر سیفا... سازگار میربخشی
- تعداد اعضای همکار در طول مدت پروژه: ۲۷ نفر تمام وقت
- زمان اجرای پروژه: تابستان و پائیز سال ۱۳۸۴
- زمان تخمینی اولیه: ۵ ماه

فرضیه: با عنایت به شباهت کلی ساختار مثال جاری و مدل ریاضی، می‌توان نتیجه گرفت که ساختار عملی از یک فرآیند پواسن تبعیت می‌کند.

نکته: نتایج عملی و اجرایی پروژه که به‌صورت نمودار و به‌صورت نرم‌افزاری، روزانه ترسیم می‌گردند، *با تقریب بالای ۸۵٪، این مسأله را تصدیق می‌کند.*

سپاس

در ابتدا از آقایان Erol A.Peköz و Nitandra Joglekar به دلیل زحمات‌شان بر روی این مقاله -که به‌عنوان پایه کار در نظر گرفتم- و عنوان آن در ژورنال احتمالات کاربردی متشکرم. نیز از تمام کسانی که نام آن‌ها در فهرست منابع آمد است و با آن‌ها از طریق پست الکترونیک در ارتباط بودم و پاسخی برای پرسش‌های بی‌شمار من در موارد مرتبط و گاهی غیر مرتبط ارائه دادند.
هم‌چنین از جناب آقای دکتر هاشمی کمال تشکر و سپاس را دارم که با ارائه این درس باعث شدند تا علاقه‌ی قدیمی‌ام به بررسی و تحقیق در زمینه تئوری صف و کاربردهایش شکل علمی بگیرد.

منابع

منابع این مقاله در دو گروه خواهند آمد. گروه اول، سری منابع لیست شده در انتهای مقاله اصلی در قسمت Bibliography ذکر گردیده است و برای جلوگیری از تکرار مجدد در این‌جا از نگاشتن آن‌ها صرف‌نظر گشته است.گروه دوم منابعی را شامل می‌شود که نگارنده از آن‌ها در درک بهتر مطلب یاری ستانده است.

1. Breiman, Leo, The Poisson tendency in traffic distribution. Ann. Math. Statist. v. 34, 1963, pp. 308–311.
2. Daley, D.J. & Vere-Jones, D. (1988) An introduction to the theory of point processes. Springer Series in Statistics. New York: Springer.
3. Mountford, T., Prabhakar, B. (1995) On the weak convergence of departures from an infinite series of · /M/1 queues. The Annals of Applied Probability, Vol. 5, No. 1, pp. 121 – 127

4. Prabhakar, B.; Mountford, T. S.; Bambos, N. Convergence of departures in tandem networks of · /GI/∞ queues. Probab. Engrg. Inform. Sci. 10 (1996), no. 4, 487–500.
5. Mor Harchol-Balter, Takayuki Osogami, Alan Scheller-Wolf, Adam Wierman, Multi-server queuing systems with multiple priority classes
6. Ioannis Stavrakakis, Senior Member, IEEE, Delay Bounds on a Queuing System with Consistent Priorities
7. Maria de Lurdes Sim˜oes, Paula Milheiro Oliveira, and Am´erico Pires da Costa, Queues with server vacations in urban traffic control

ضمیمه I : مجموعه‌های Borel

در ریاضیات، جبر بورل روی فضای توپولوژیک X، یک جبر σ از زیرمجموعه‌های X متصل به توپولوژی X است. در ادبیات ریاضی، حداقل دو معنای نابرابر برای این جبر σ وجود دارد:

۱. جبر σ مینیمال شامل مجموعه‌های باز[۴۳]
۲. جبر σ ماکسیمال شامل مجموعه‌های فشرده[۴۴]

عناصر تفکیک‌پذیر یک جبر بورل را مجموعه‌های بورل می‌نامیم و به یک زیرمجموعه از X که بورل نیز باشد، زیرمجموعه بورل می‌گوئیم.

خواص مجموعه‌های بورل و نحوه‌ی ساخت جبرهای بورل در این مقام نمی‌گنجد و تنها به ذکر این نکته بسنده می‌کنیم که مجموعه‌های بورل در ریاضیات شمارشی برای نظیر کردن به‌کار می‌روند. به‌عنوان مثال در همین مقاله برای نظیر کردن به‌هنگام استفاده از تابع جرم در انتگرال‌گیری پیشرفته از مجموعه‌ی بورلی برای نقاط پیوسته استفاده نمودیم.

43 Open Set
44 Compact Set