

منطق فازی



سر فصل مطالب

- مقدمه
- منطق های دو و چند مقداری (Bi- & Multivalent Logics)
- متغیرهای زبانی (Linguistic Variables)
- مجموعه های فازی (Fuzzy Sets)
- توابع عضویت فازی (Fuzzy Membership Functions)
- عملگرهای فازی (Fuzzy Operators)
- حصارها (Hedges)
- منطق فازی (Fuzzy Logics)
- قوانین و استنتاج فازی (Fuzzy Rules & Inference)
- سامانه های خبره ی فازی (Fuzzy Expert Systems)
- فازی و یادگیری (Fuzzy & Learning)



مقدمه

- اولین نشانه ها از تفکر فازی: بودا در ۵۰۰ پیش از میلاد
 - تفکر خلاف زایی در دین بودایی: هر عنصری با بوجود آمدن کمی از متضاد خود را نیز در بر دارد.

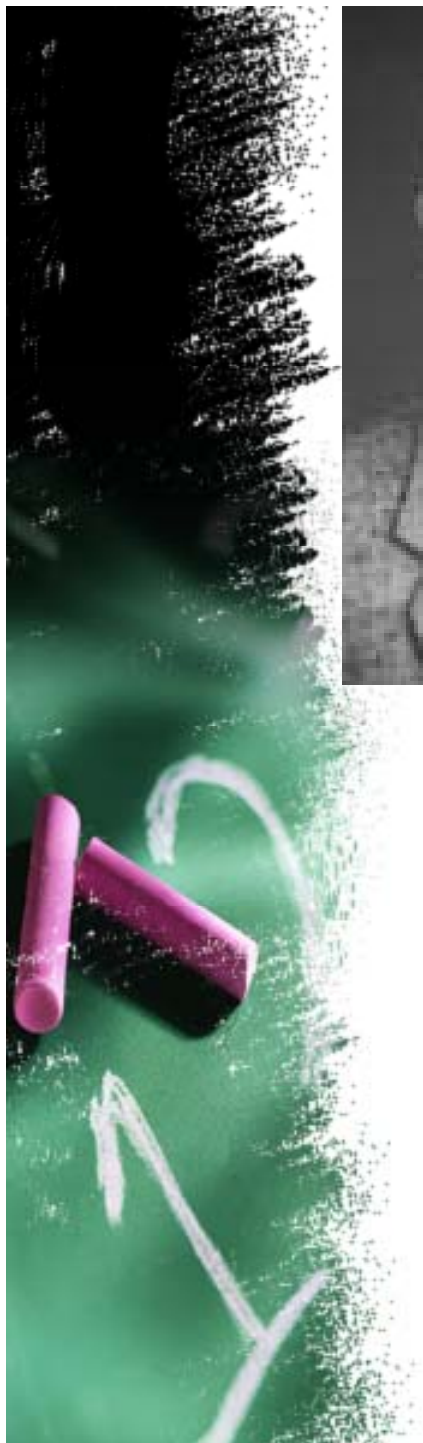
➤ $1 - A \neq A$

- ۲۰۰ سال بعد: ایجاد تفکر باینری توسط ارسطو
 - اقبال در میان دانشمندان
 - حمایت کلیسا
 - پایه ای برای علوم
- تلاش های راسل برای کاهش ریاضیات به منطق
 - پارادوکس راسل
- ۱۹۶۴: لطفی عسکرزاده



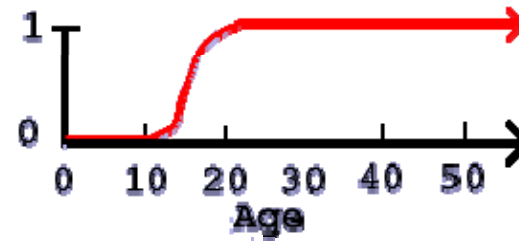
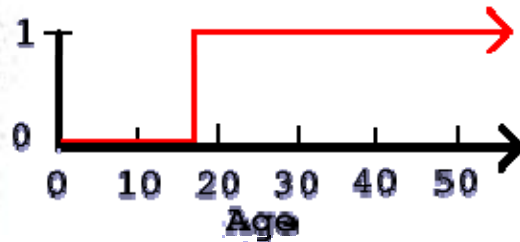
مقدمه

- ۱۹۶۴: لطفی عسکرزاده
 - دستگاه تهویه مطبوع هوش مند
 - تولد مفهوم فازی بودن
- عدم استقبال خوب در آمریکا و اروپا
- سفر فازی به شرق دور
 - تطبیق فازی با ادیان شرقی
 - ۱۹۸۷: سامانه ی کنترل اتوماتیک مترو در ژاپن
 - اولین موفقیت بزرگ
 - بحث در جوامع علمی و صنعتی دنیا

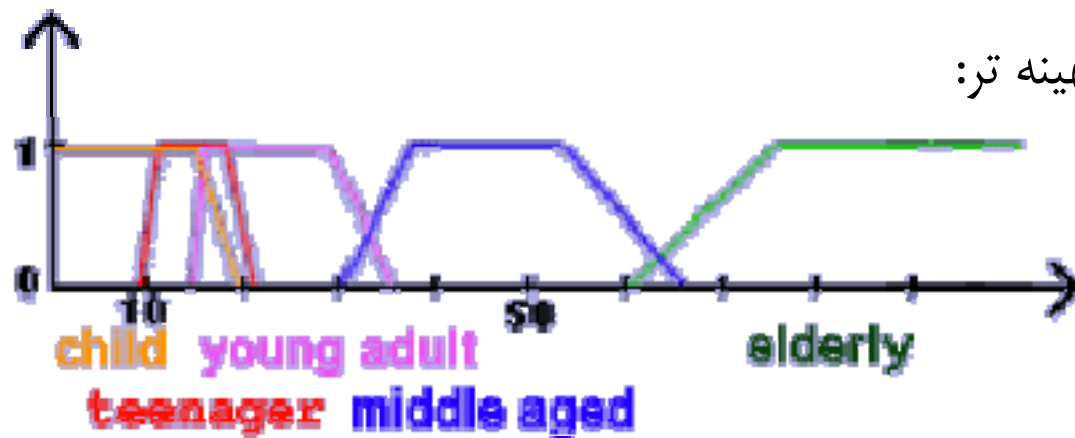


مقدمه

- فازی چه می گوید؟
 - A می تواند با A ! برابری باشد!!!
 - معیاری برای سنجش A بودن لازم است
- تفاوت دیدگاه باینری و فازی:



- یک معیار بهینه تر:



مقدمه

- موفق ترین راهکار و فناوری برای طراحی سامانه های خیره
- شبیه سازی تصمیم گیری انسانی
- قابلیت ارائه ی پاسخ های دقیق بر مبنای داده های قطعی یا ناهموار
- تطبیق ابهام دنیای زبان انسانی با منطق ریاضی
- ...
- اولین کاربردها:
 - کنترل پروسه های کوره های سیمان
 - در ۱۹۸۷، اولین بزرگراه کنترل با منطق فازی در *Sendai* در شمال ژاپن
 - در آسانسورها برای کاهش زمان انتظار
- کاربردهای کنونی:
 - ماشین های ظرف شویی، اتومبیل ها، میکروفرها، ...



منطق های دو و چند مقداری

- منطق ارسطویی:

- دو مقدار ارزشی، درست یا غلط

- پدر منطق های دوازدهمی، نظیر منطق مورد استفاده در استنتاج *Bayesian* و سایر مدل های احتمالاتی

- مشکل:

- معمولاً نمیتوان به یقین گفت که یک گزاره در کدام ارزش شکل صحیح تری دارد.

- استفاده از احتمالات برای محاسبه ی میزان درست نمایی (*Likelihood*)

- اولین منطق چند ارزشی توسط Knuth و Lukasiewicz:

- فیزیک کوانتوم

- منطق سه ارزشی، درست یا غلط یا نامعین



منطق های دو و چند مقداری

- گسترش منطق سه ارزشی:

- صفر برای نمایش عدم صحت قطعی

- یک برای نمایش صحت قطعی

- مقادیر بین صفر و یک برای میزان (عدم) صحت غیر قطعی

- تفاوت با احتمالات:

- احتمال صحت ۰.۵ بدین معنی است که گزاره احتمال صحتی برابر ۰.۵ دارد، ولی

- یا می تواند درست باشد و یا غلط؛ و نه چیزی بین آن ها و نه هر دو و نه هیچ

- کدام(!!!!)



متغیرهای زبانی

- یک مفهوم، نظیر ارتفاع
- که می تواند مقداری از میان مجموعه مقادیر فازی
- نظیر {بلند، کوتاه، متوسط}
- را بپذیرد.
- Universe of Discourse متغیرهای زبانی روی یک
- نظیر {مقادیر بین ۰.۸ متر تا ۲.۵ متر}
- تعریف می شوند.
- مجموعه مقادیر فازی، زیرمجموعه هایی از این دنیا می باشند.



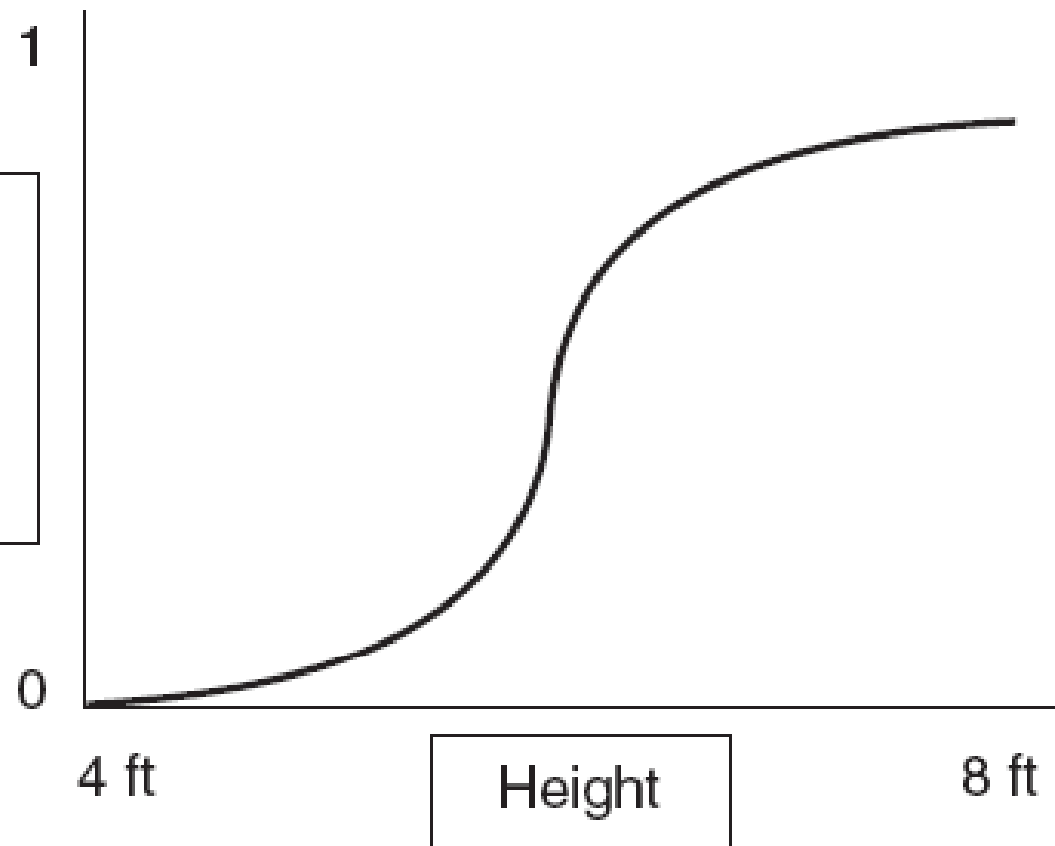
مجموعه های فازی

- نقطه ی مقابل مجموعه های Crisp:
 - عدد ۰.۲ عضوی از مجموعه ی اعداد طبیعی نیست
- چند پرسش:
 - آیا یک فرد دو متری بلند قد است؟
 - یک فرد یک متر و نود سانتیمتری چطور؟
 - یک فرد یک متر و هفتاد سانتیمتری چطور؟
 - یک فرد یک متر و پنجاه سانتیمتری چطور؟
- مطابق منطق فازی، تمام افراد بالا بلند قد هستند،
- ولی درجه ی بلندقدی شان متفاوت است!

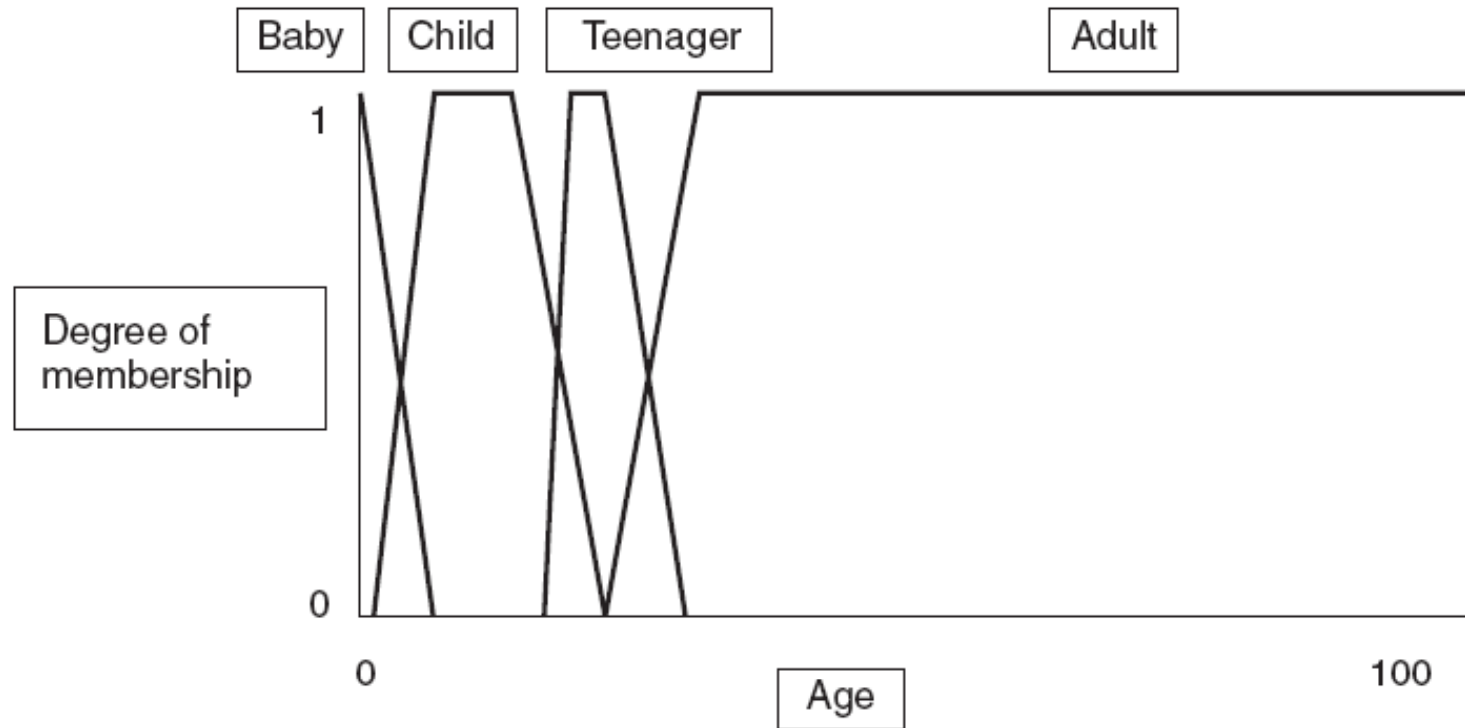


مجموعه های فازی

Degree of membership of the fuzzy set of tall people



مجموعه های فازی



توابع عضویت فازی

• هر مجموعه ی فازی را با تابع عضویت اش می شناسیم:

$$M_B(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & \text{for } x \leq 2 \\ 0 & \text{for } x > 2 \end{cases}$$

$$M_C(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{6} & \text{for } x \leq 7 \\ 1 & \text{for } x > 7 \text{ and } x \leq 8 \\ \frac{14-x}{6} & \text{for } x > 8 \end{cases}$$

• برای نمایش مجموعه ی A داریم:

$$A = \{(x_1, M_A(x_1)), \dots, (x_m, M_A(x_m))\}$$

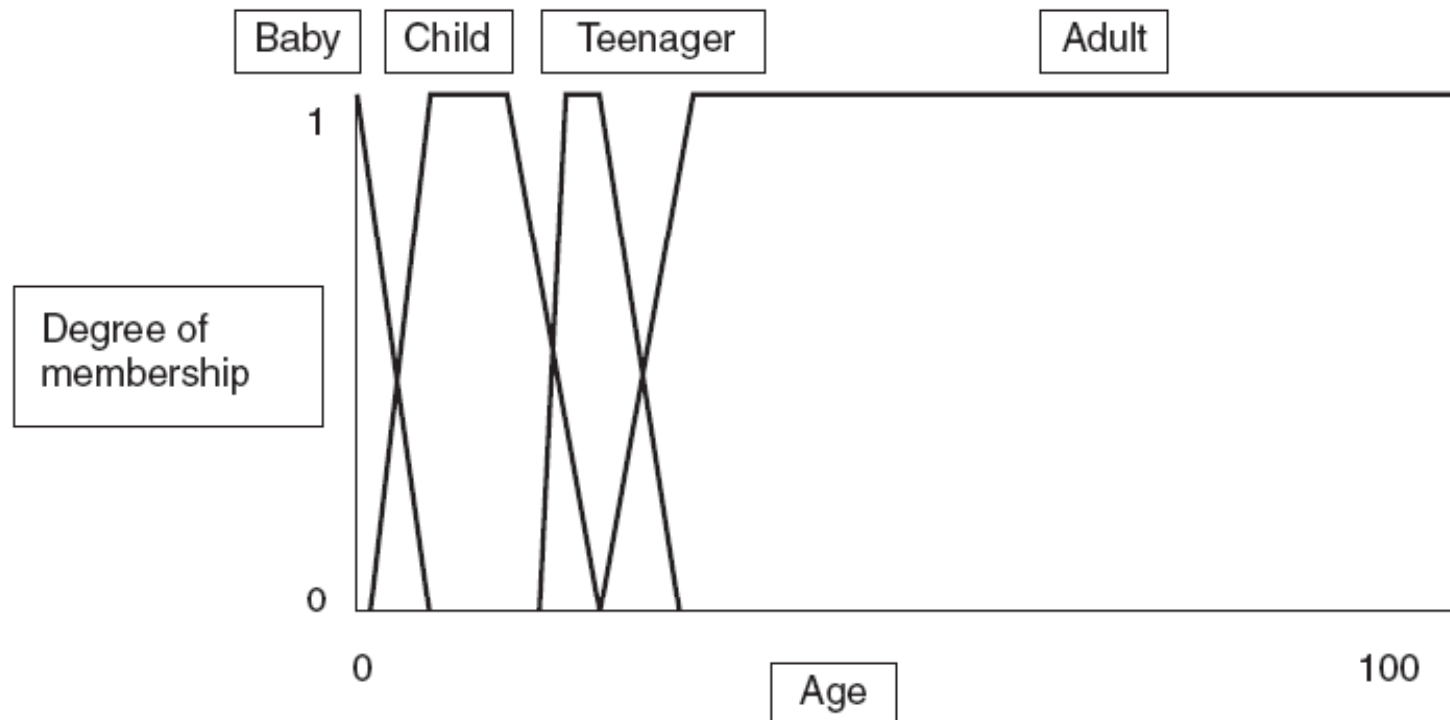


توابع عضویت فازی

- برای مثال سن خواهیم داشت:

$$B = \{(0, 1), (2, 0)\}$$

$$C = \{(1, 0), (7, 1), (8, 1), (14, 0)\}$$



عملگرهای فازی

- نظریه ی سنتی مجموعه ها: جورج کاتور، قرن نوزدهم

 - متمم مجموعه ی A ، هم ارز عملگر \neg

 - اشتراک مجموعه های A و B ، هم ارز عملگر \wedge

 - اجتماع مجموعه های A و B ، هم ارز عملگر \vee

- قوانین دمورگان

- می توان همین عملگرها را نیز برای مجموعه های فازی تعریف کرد:

$$M_{\neg B}(x) = 1 - M_B(x)$$

- در نتیجه:

$$\neg B = \{(0, 0), (2, 1)\}$$

- و:

$$\neg C = \{(1, 1), (7, 0), (8, 0), (14, 1)\}$$



عملگرهای فازی

- برای عملگر اشتراک، خواهیم داشت:

$$M_{A \cap B}(x) = \text{MIN}(M_A(x), M_B(x))$$

- که برای مثال ما:

$$B = \{(0, 1), (2, 0)\}$$

$$C = \{(1, 0), (7, 1), (8, 1), (14, 0)\}$$

$$B = \{(0, 1), (1, 0.5), (2, 0), (7, 0), (8, 0), (14, 0)\}$$

$$C = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0.166), (7, 1), (8, 1), (14, 0)\}$$

$$M_{B \cap C}(x) = \text{MIN}(M_B(x), M_C(x))$$

$$\therefore B \cap C = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (7, 0), (8, 0), (14, 0)\}$$

عملگرهای فازی

- مشخص است که این نوع تعریف، کارساز نبوده است.
- بهتر این بود که تعریف کنیم:

$$B \cap C = \{(1, 0), (1.75, 0.125), (2, 0)\}$$

- و همین طور برای اجتماع:

$$M_{A \cup B}(x) = \text{MAX}(M_A(x), M_B(x))$$

- که:

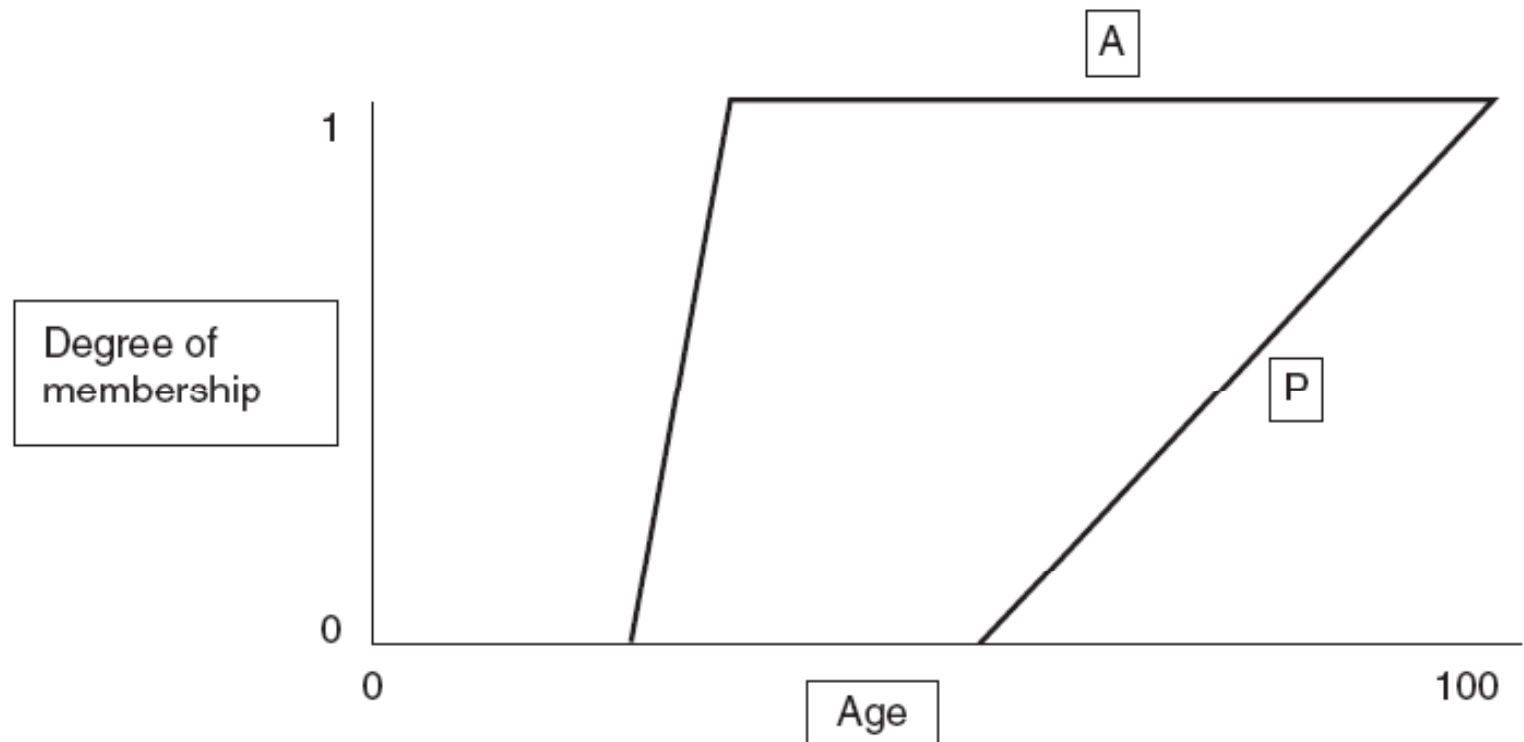
$$B \cup C = \{(0, 1), (1.75, 0.25), (7, 1), (8, 1), (14, 0)\}$$



عملگرهای فازی

- برای عملگر زیرمجموعه بودن:

$$B \subset A \text{ iff } \forall x (M_B(x) \leq M_A(x))$$



حصارها

- حصار، یک توصیف کننده است،
- نظیر «خیلی» و «تقریباً» و «به شدت» و «مقداری»
- که وقتی به یک مجموعه ی فازی اعمال می شود،
- یک مجموعه ی جدید می سازد، که زیرمجموعه یا ابر مجموعه ی قبلی است.
- می توان یک راه حل ریاضی سیستماتیک برای این موضوع ارائه داد:

➤ «خیلی» یعنی:

$$M_{VA}(x) = (M_A(x))^2$$

➤ و برای سایر حصارها، اعداد ۱.۳ و ۴ و ۰.۵ را برای به توان رساندن در نظر می گیریم.

- در نتیجه کسی که ۰.۶ «بلند» است، ۰.۳۶ «خیلی بلند»، ۰.۵۱۵ «تقریباً بلند»، ۰.۷۷۵ «مقداری بلند» و ۰.۱۲۹۶ «به شدت بلند» خواهد بود.



منطق فازی

- منطقی که بر متغیرهای فازی اعمال می شود
- منطقی غیر یکنواخت است:
➤ افزودن یک حقیقت جدید به پایگاه داده ها، ممکن است نتایجی را به دست دهد که با نتایج گذشته در تناقض باشد.

$$A \vee B \equiv \text{MAX} (A, B)$$

$$A \wedge B \equiv \text{MIN} (A, B)$$

$$\neg A \equiv 1 - A$$



منطق فازی

$$A \vee B \equiv \text{MAX} (A, B)$$

$$A \wedge B \equiv \text{MIN} (A, B)$$

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	0.5	0.5
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	1
1	0.5	1
1	1	1

$$\neg A \equiv 1 - A$$

A	$\neg A$
0	1
0.5	0.5
1	0



$$A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$$

$$A \rightarrow B \equiv \text{MAX}((1 - A), B)$$


منطق فازی

A	B	A → B
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0.5
0.5	0.5	0.5
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1



منطق فازی

• با توجه به اینکه در این جدول، اشکالاتی هست:

- $0.5 \rightarrow 0 = 0.5$  $0.5 \rightarrow 0 = 0$
- $0.5 \rightarrow 0.5 = 0.5$ $0.5 \rightarrow 0.5 = 1$

• در نتیجه باید در تعاریف مان تغییراتی بوجود آوریم:

➤ استلزام گودل:

$$A \rightarrow B \equiv (A \leq B) \vee B$$



منطق فازی

$$A \rightarrow B \equiv (A \leq B) \vee B$$

A	B	A → B
0	0	1
0	0.5	1
0	1	1
0.5	0	0
0.5	0.5	1
0.5	1	1
1	0	0
1	0.5	0.5
1	1	1



منطق فازی

$$\frac{A \quad A \rightarrow B}{B}$$

A	B	$A \rightarrow B$	$(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$
0	0	1	1
0	0.5	1	1
0	1	1	1
0.5	0	0	1
0.5	0.5	1	0.5
0.5	1	1	1
1	0	0	1
1	0.5	0.5	1
1	1	1	1



منطق فازی و تناقض های سنتی

- پارادوکس راسل:

➤ آرایشگری که خودش هم ریش دارد، صورت تمام مردانی را اصلاح می کند که خود صورتشان را اصلاح نمی کنند. او صورت مردانی که خود صورت شان را اصلاح می کنند، اصلاح نمی کند.

➤ چه کسی صورت آرایشگر را اصلاح می کند؟

- پارادوکس جزیره ی کرت:

➤ یک شخص اهل کرت می گوید: «تمام کرتی ها دروغ گو هستند.»

➤ او راست می گوید یا دروغ؟



قوانین فازی

- قوانین معمولی:

IF A THEN B

- در برابر قوانین فازی:

IF $A = x$ then $B = y$

- یا در حقیقت:

IF $A \text{ op } x$ then $B = y$

IF temperature > 50 then fan speed = fast

IF height = tall then trouser length = long

IF study time = short then grades = poor



قوانین فازی

- به عنوان یک جانشین برای استلزام گودل،
- استلزام ممدانی، ۱۹۷۰، ابراهیم ممدانی، برای کنترل یک موتور و دیگ بخار:
 - ورودی ← یک سری داده ی *Crisp* از حس گرها یا اپراتور انسانی
 - تصمیم گیری بر مبانی فازی
 - خروجی ← یک داده ی *Crisp* واحد یا یک تصمیم پیشنهادی
- مراحل استدلال بر اساس استلزام ممدانی:
 - فازی کردن داده ی *Crisp* ورودی: تعریف مجموعه های فازی برای متغیرهای زبانی (*Fuzzification*)
 - تبدیل مقادیر عددی *Crisp* به مقادیر فازی
 - اعمال قوانین فازی
 - ترکیب تصمیم های پیشنهادی سامانه به یک تصمیم واحد یا یک مقدار *Crisp* (*Defuzzification*)



قوانین فازی

• مدل نمونه: سامانه ی ترمز اتومبیل

Rule 1 IF pressure on brake pedal is medium

THEN apply the brake

Rule 2 IF pressure on brake pedal is high

AND car speed is fast

AND wheel speed is fast

THEN apply the brake

Rule 3 IF pressure on brake pedal is high

AND car speed is fast

AND wheel speed is slow

THEN release the brake

Rule 4 IF pressure on brake pedal is low

THEN release the brake



قوانین فازی

- مدل نمونه: سامانه ی ترمز اتومبیل
- فشار ترمز دارای مقادیری بین ۰ تا ۱۰۰ است.

$$H = \{(50, 0), (100, 1)\}$$

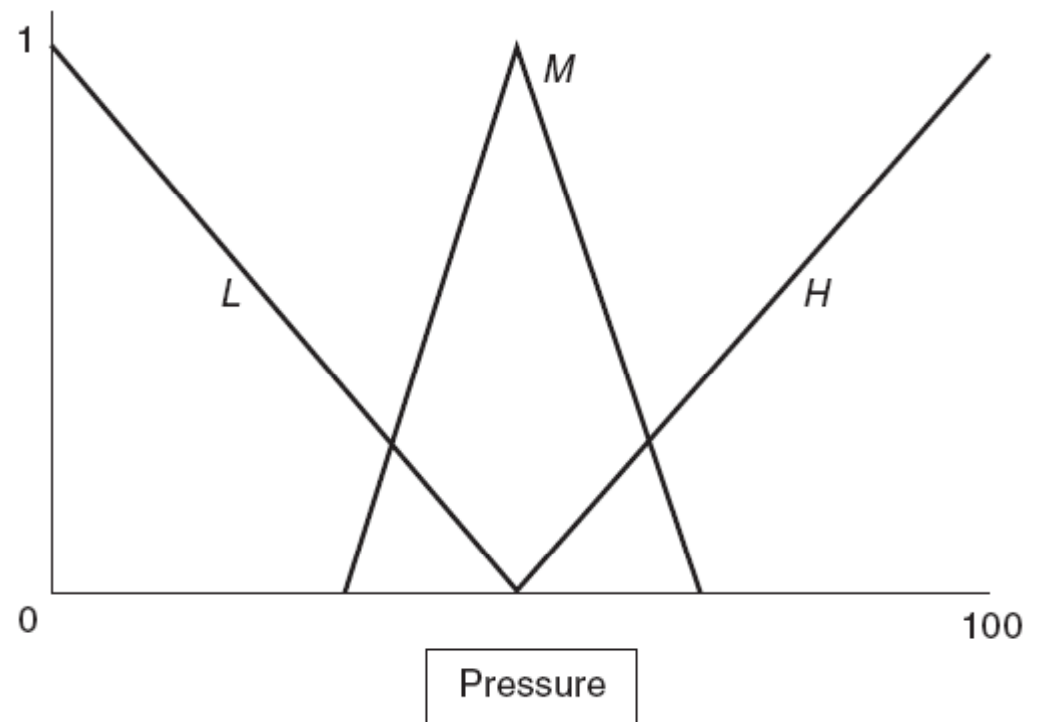
$$M = \{(30, 0), (50, 1), (70, 0)\}$$

$$L = \{(0, 1), (50, 0)\}$$

$$M_L(60) = 0$$

$$M_M(60) = 0.5$$

$$M_H(60) = 0.2$$



قوانین فازی

- مدل نمونه: سامانه ی ترمز اتومبیل

- سرعت چرخ ها دارای مقادیری بین ۰ تا ۱۰۰ است.

$$S = \{(0, 1), (60, 0)\}$$

$$M = \{(20, 0), (50, 1), (80, 0)\}$$

$$F = \{(40, 0), (100, 1)\}$$

$$M_S(80) = 0$$

$$M_M(80) = 0$$

$$M_F(80) = 0.667$$



قوانین فازی

• مدل نمونه: سامانه ی ترمز اتومبیل

➤ فشار ترمز: ۶۰

➤ سرعت چرخ ها: ۱۰

➤ قانون اول: مقدار ۰.۵ برای «ترمز را اعمال کن.»

➤ قانون دوم: مقدار ۰.۲ برای «ترمز را اعمال کن.»

➤ قانون سوم: مقدار ۰.۰۸۳ برای «ترمز را رها کن.»

➤ قانون چهارم: مقدار ۰ برای «ترمز را رها کن.»

• ترکیب مناسب، وابسته به طبیعت مسأله است.

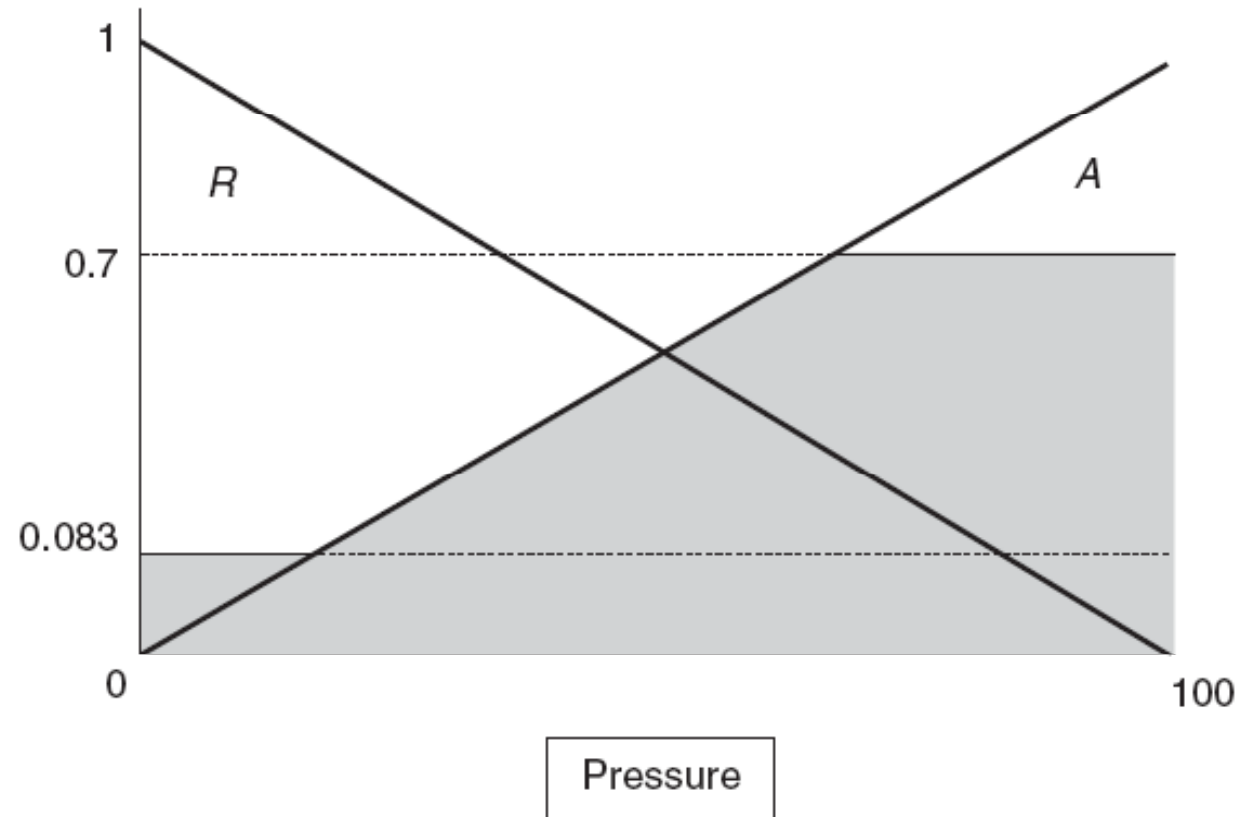
➤ در این سؤال جمع کردن مقادیر راه حل مناسبی به نظر می آید.

• مقدار ۰.۷ برای «ترمز را اعمال کن» و ۰.۰۸۳ برای «ترمز را رها کن.»



قوانین فازی

- مدل نمونه: سامانه ی ترمز اتومبیل
- مرحله ی بعدی **Clip** کردن توابع عضویت دو متغییر به مقادیر به دست آمده است:



قوانین فازی

- مدل نمونه: سامانه ی ترمز اتومبیل
- برای استفاده از این خروجی، باید یک داده ی Crisp معرفی شود:
➤ مرکز ثقل (Centroid)

$$C = \frac{\sum M_A(x)x}{\sum M_A(x)}$$

➤ که در واقع بهتر است در شکل انتگرالی محاسبه شود.

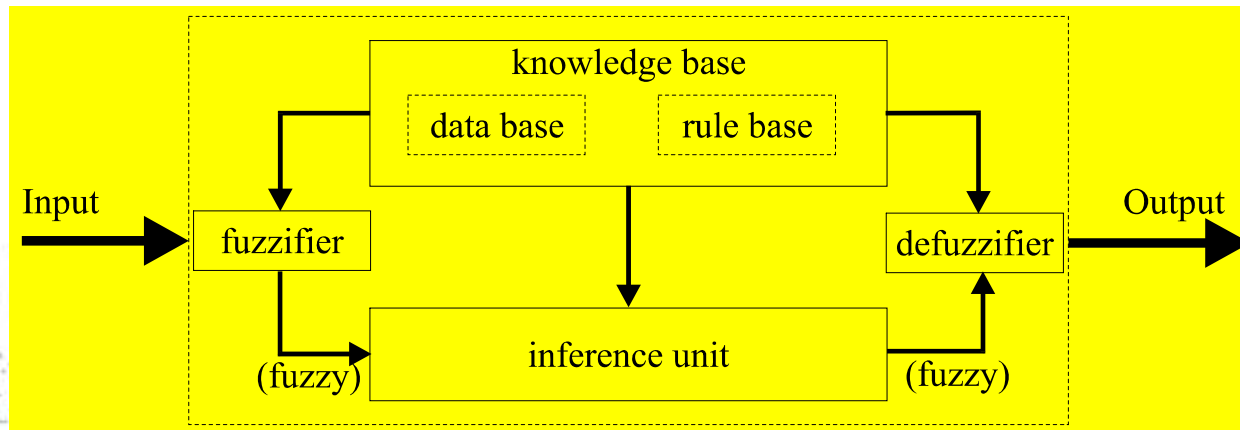
$$C = \frac{(5 \times 0.83) + (10 \times 0.1) + (15 \times 0.15) + (20 \times 0.2) + \dots + (100 \times 1)}{0.083 + 0.1 + 0.15 + 0.2 + \dots + 1}$$
$$= \frac{717.666}{10.533} = 68.13$$

➤ که یعنی: فشار اعمالی از ترمز به چرخ ها برابر ۶۸.۱۳ است.



سامانه های خبره

- مراحل ساخت یک سامانه ی خبره:
 - گرفتن اطلاعات از یک یا گروهی خبره
 - تعریف مجموعه های فازی
 - تعریف قوانین فازی
 - ایجاد ارتباط بین مشاهدات و مجموعه های فازی
 - ارزیابی هر مورد برای تمام قوانین فازی
 - ترکیب اطلاعات بدست آمده از قوانین
 - *Defuzzify* کردن نتایج



فازی و یادگیری

- سامانه های فازی مورد بررسی تا به حال ثابت بودند و پس از تعریف مجموعه ها و قوانین، تغییری در آن ها رخ نمی داد. با ورود داده های جدید، این سامانه ها اطلاعات جدیدی دریافت نمی کردند. ولی به دلیل **Subjective** بودن قوانین تعریف شده توسط افراد خبره، این قوانین ممکن است گنگ بوده یا در بین خبرگان مختلف متفاوت باشند و بهتر است که با استفاده از داده ها، آن ها را بهبود داد.

- ترکیب فازی و شبکه های عصبی: **Neuro-Fuzzy**



فازی و یادگیری

- **Neuro-Fuzzy**: یک شبکه ی عصبی که با استفاده از قوانین و طبقه بندی فازی، نحوه ی طبقه بندی داده ها را یاد می گیرد.

- نکات مثبت در مقابل سامانه های فازی و شبکه های عصبی سنتی:

- شبکه های عصبی سنتی، به مثابه ی یک «جعبه سیاه» هستند، زیرا پس از آموزش، دلیل خروجی ارائه شده توسط آن ها برای یک مجموعه از ورودی ها به سختی قابل بررسی است.

- سامانه های فازی دارای حالت *Static* می باشند.



فازی و یادگیری

- ساختار شبکه های عصبی فازی:

- یک شبکه ی پنج لایه ی Feed Forward

- I. لایه ی ورودی: داده ی Crisp

- II. توابع عضویت ورودی فازی

- III. قوانین فازی

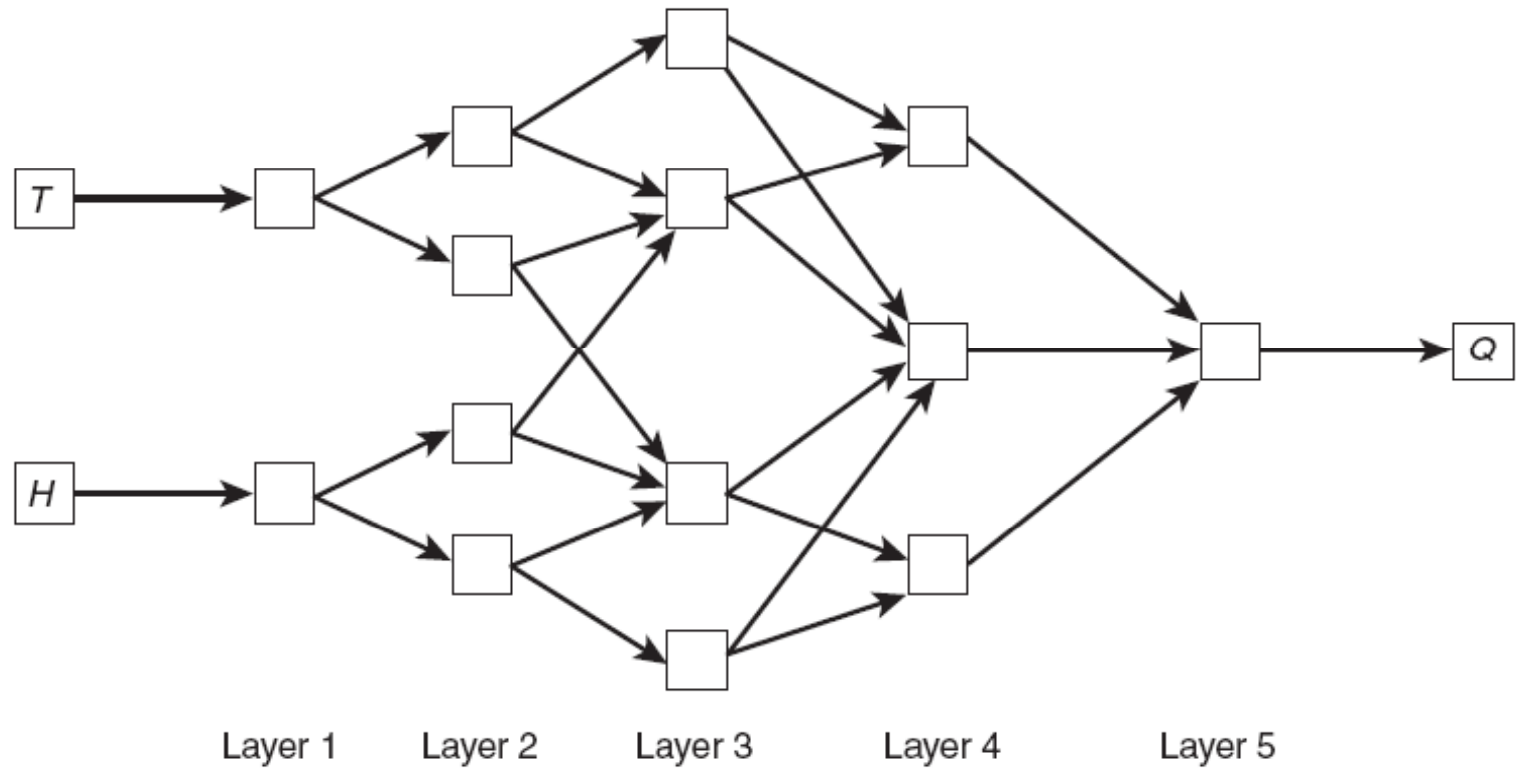
- IV. توابع عضویت خروجی فازی

- V. لایه ی خروجی: مقادیر داده ی Crisp



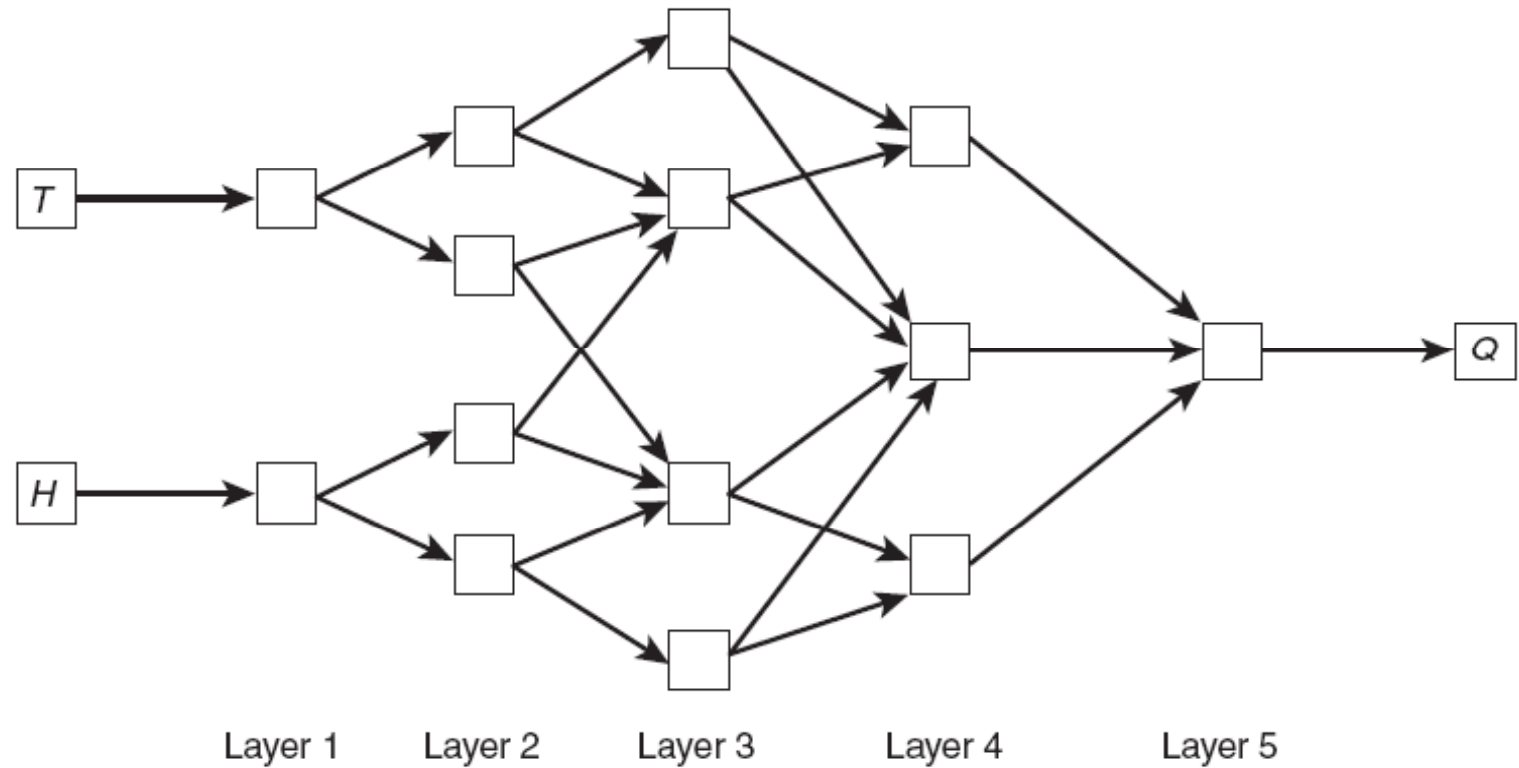
فازی و یادگیری

• ساختار شبکه های عصبی فازی



فازی و یادگیری

- ساختار شبکه های عصبی فازی

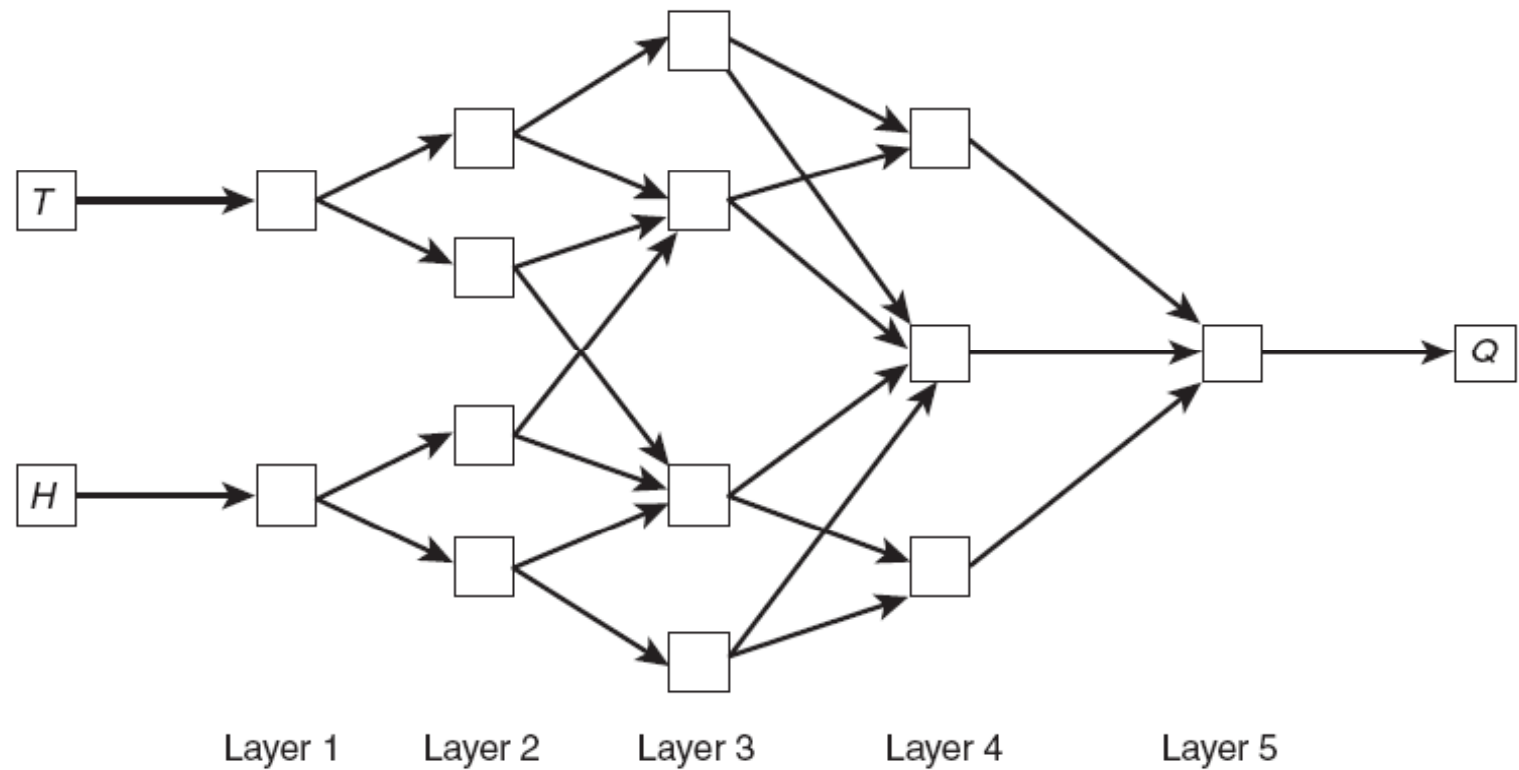


Pass crisp input to next layer



فازی و یادگیری

- ساختار شبکه های عصبی فازی

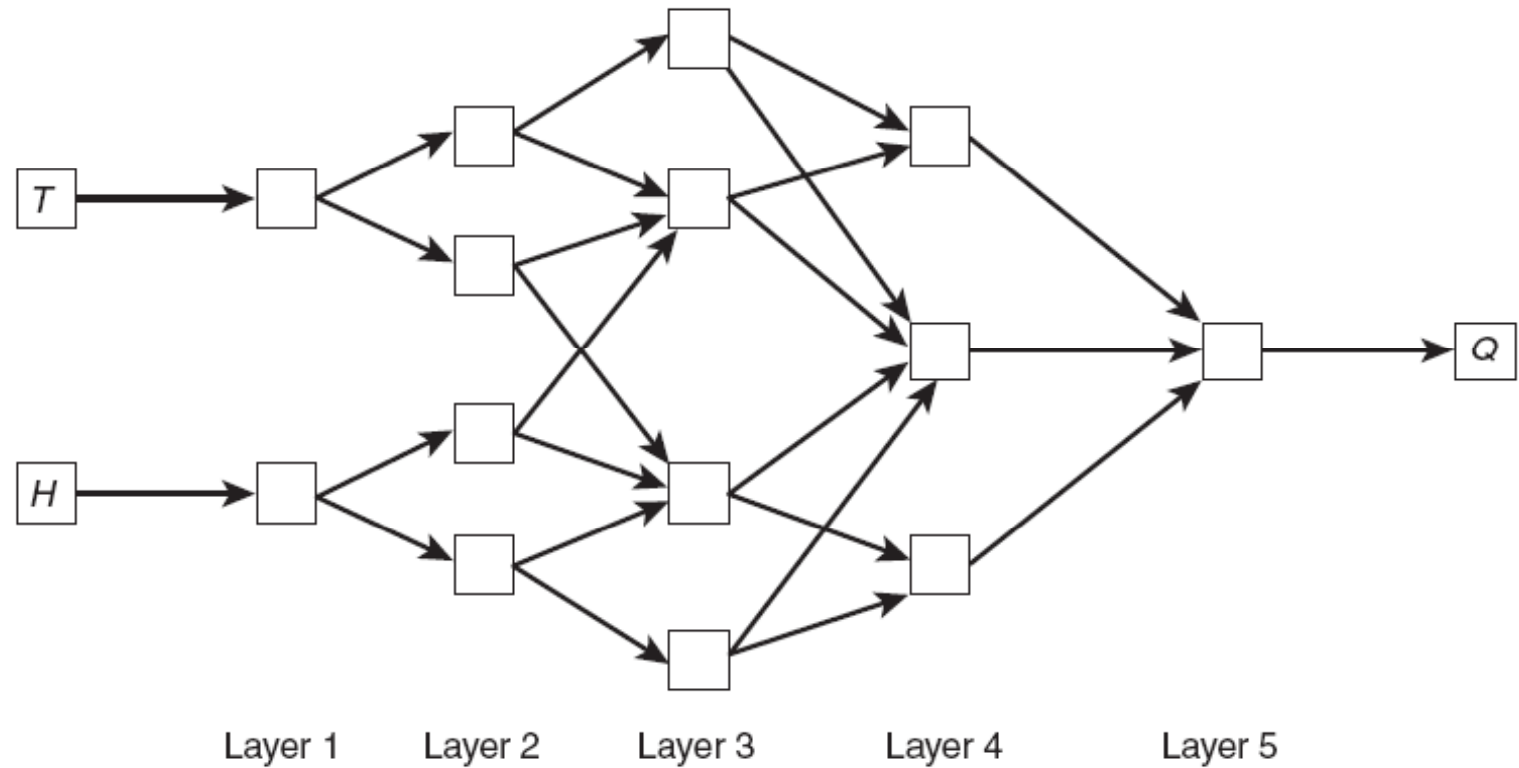


Fuzzify the crisp input



فازی و یادگیری

- ساختار شبکه های عصبی فازی

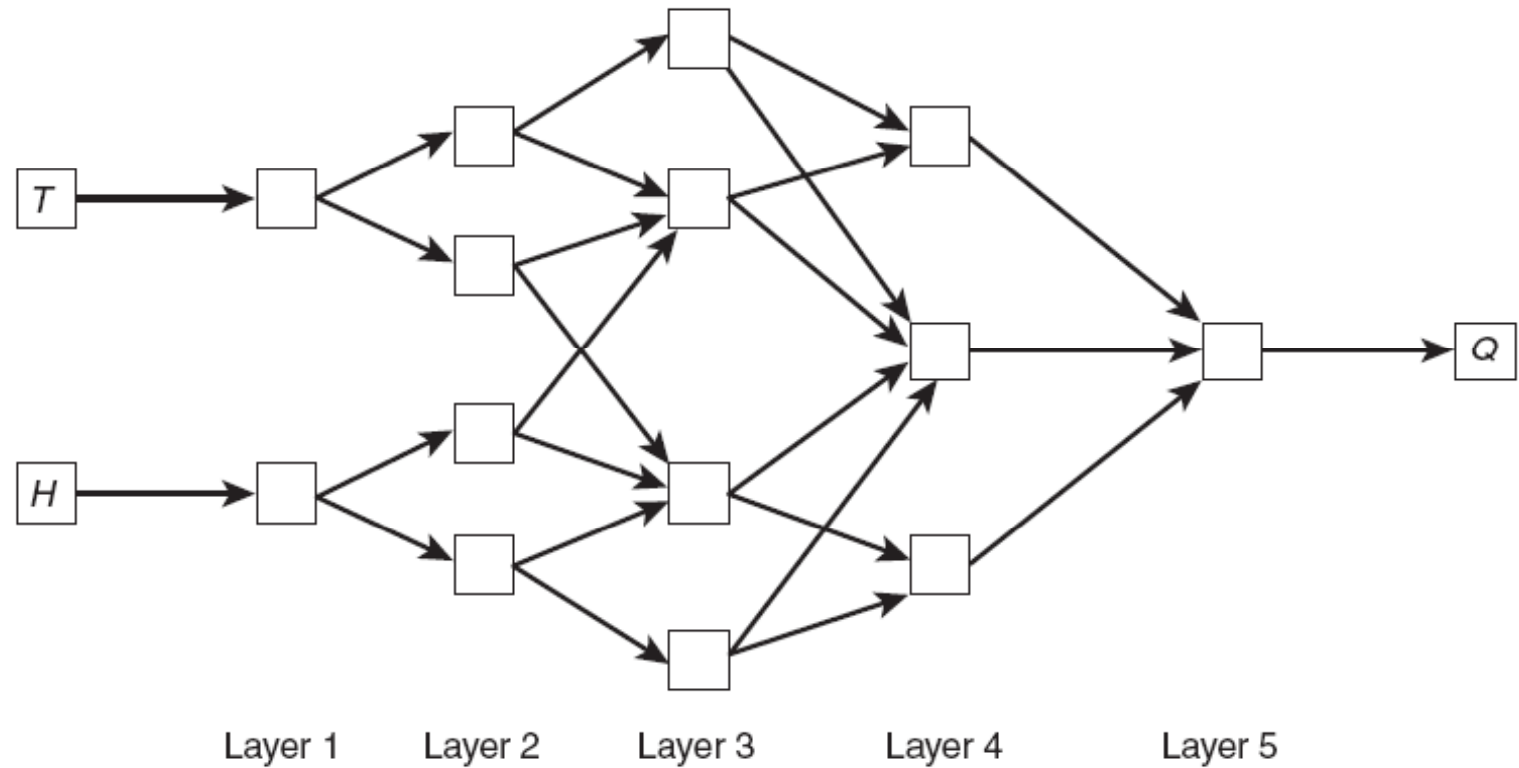


Pass fuzzified data to system rules



فازی و یادگیری

- ساختار شبکه های عصبی فازی

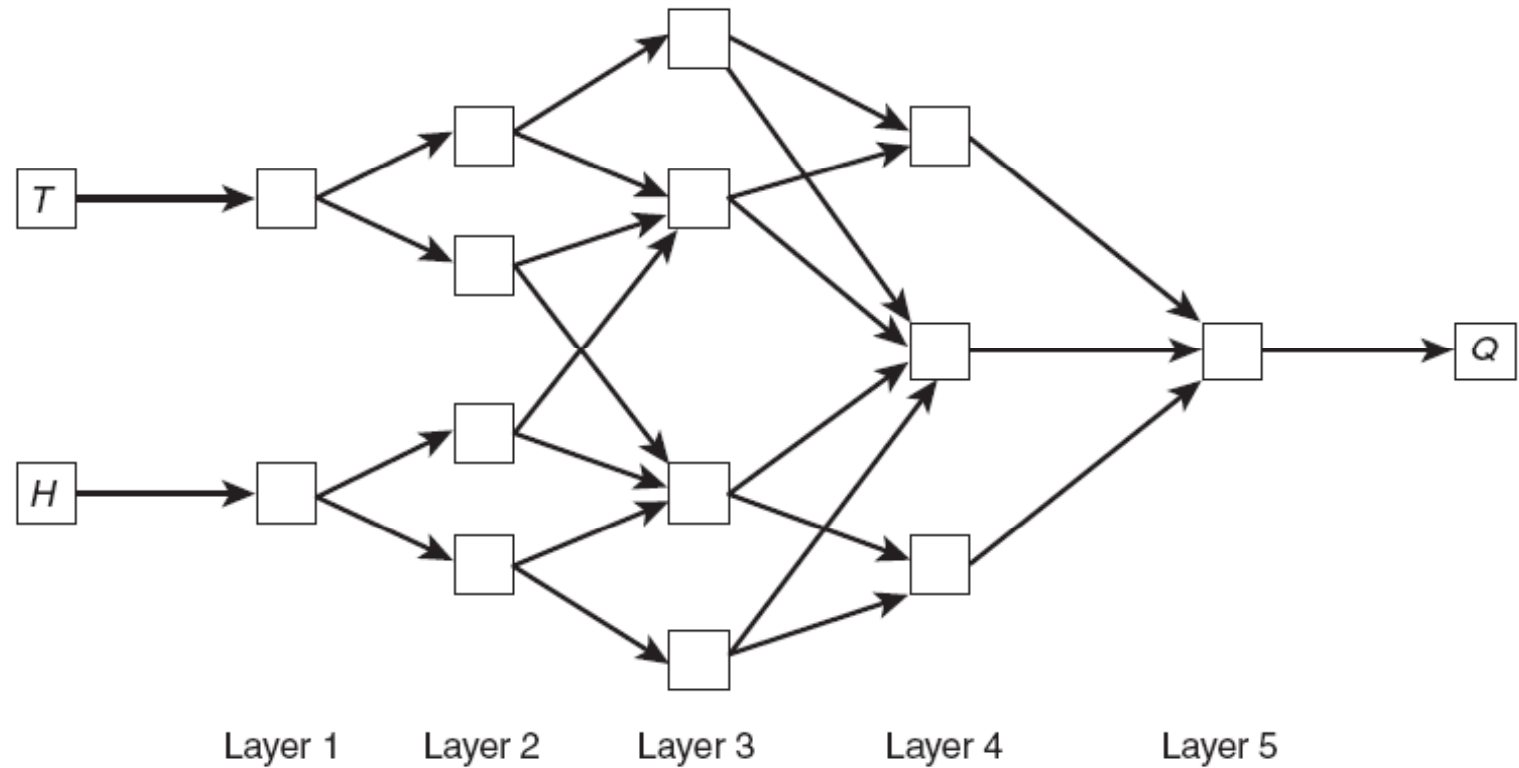


Pass rule outcome to output membership functions



فازی و یادگیری

- ساختار شبکه های عصبی فازی



Combine & defuzzify various outputs



فازی و ...

- مسلماً مطالب زیادی باقی مانده است!

- انواع دیگر استلزم منطقی نظیر:

- Tsukamoto

- Sugeno

- انواع دیگر Clipping

- انواع دیگر سامانه های خبره و کاربردهای دیگر فازی

• زمان یک عامل بازدارنده است!

